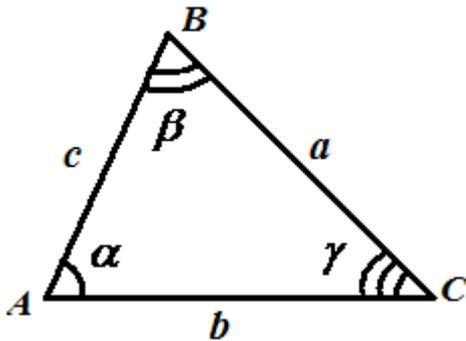


Теорема косинусов.

Теорема косинусов. Если стороны треугольника ABC равны соответственно a , b и c , а противолежащие им углы – α , β и γ (рис. 1), то выполняются следующие равенства:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Рис. 1

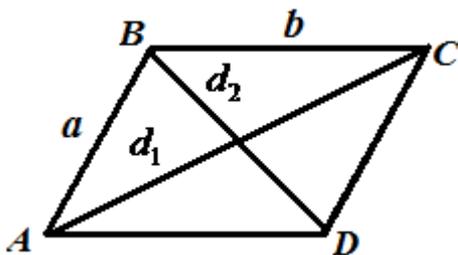
Следствие 1. Если стороны треугольника ABC равны соответственно a , b и c , а противолежащие им углы – α , β и γ , то

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Следствие 2. Если стороны треугольника ABC равны соответственно a , b и c , а противолежащие им углы – α , β и γ (рис. 1), причем a – наибольшая из сторон, то

- если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник – остроугольный;
- если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник – тупоугольный;
- если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник – прямоугольный.

Следствие 3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (рис. 2).



$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Рис. 2

Примеры решения задач.

Пример 1. Две стороны треугольника имеют длины 7 см и 12 см, а угол между ними равен 120° . Найти третью сторону треугольника.

Решение. Запишем теорему косинусов для данного треугольника (рис. 3):
 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC.$

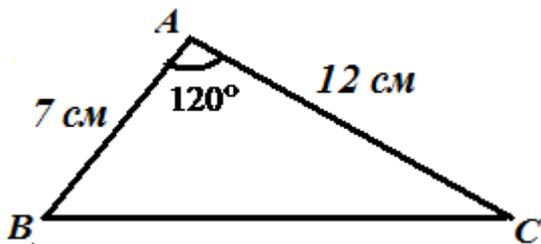


Рис. 3

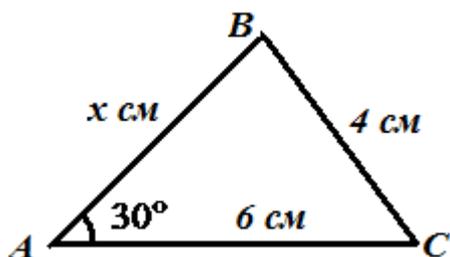
Тогда $BC^2 = 49 + 144 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ$ или, учитывая, что $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, находим:

$$BC^2 = 49 + 144 + 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}; \quad BC^2 = 277; \quad BC = \sqrt{277} \text{ см.}$$

Ответ: $\sqrt{277}$ см.

Пример 2. Найти сторону AB треугольника ABC , если $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $\angle BAC = 30^\circ$.

Решение. Пусть $AB = x$. Запишем теорему косинусов для треугольника ABC :
 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$.



Подставив данные величины, получаем (рис. 4):

$$16 = x^2 + 36 - 2 \cdot x \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$16 = x^2 + 36 - 2 \cdot x \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Отсюда } x^2 - 6\sqrt{3}x + 20 = 0.$$

Рис. 4

Решая квадратное уравнение, находим: $x_{1,2} = 3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$.

Оба корня удовлетворяют условию, поскольку существуют два различных треугольника, удовлетворяющих условию - AB_1C и AB_2C (рис. 5).

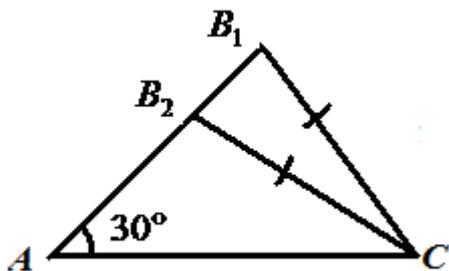


Рис. 5

Ответ: $AB = 3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ см.

Пример 3. Стороны треугольника равны $8\sqrt{3}$ см, $\sqrt{577}$ см и 11 см. Найти наибольший угол этого треугольника.

Решение. Наибольший угол треугольника лежит против его большей стороны. Запишем теорему косинусов для угла α , лежащего против стороны длиной $\sqrt{577}$ см:

$$\cos \alpha = \frac{(8\sqrt{3})^2 + 11^2 - (\sqrt{577})^2}{2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 11}; \quad \cos \alpha = \frac{192 + 121 - 577}{176\sqrt{3}} = -\frac{264}{176\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $\alpha = 150^\circ$.

Ответ: 150° .

Пример 4. Выяснить вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если длины его сторон равны 23 см; 17 см; 19 см.

Решение. Наибольшая сторона треугольника имеет длину 23 см. Воспользуемся теоремой 3.2. Для этого сравним величины $23^2 = 529$ и $17^2 + 19^2 = 289 + 361 = 650$. Поскольку вторая из них больше, данный треугольник – остроугольный.

Ответ: остроугольный.

Пример 5. Две стороны параллелограмма равны 4 см и 5 см, а одна из диагоналей – $\sqrt{46}$ см. Найти вторую диагональ параллелограмма.

Решение. Обозначим неизвестную диагональ через x . Тогда по теореме 3.3 запишем: $(\sqrt{46})^2 + x^2 = 2 \cdot (4^2 + 5^2)$. Отсюда $x^2 = 2 \cdot 41 - 46 = 82 - 46 = 36$. Значит, $x = 6$ см.

Ответ: 6 см.

Пример 6. Одна из сторон треугольника равна 3 см, а две другие стороны относятся как $\sqrt{2} : 1$. Найти величину угла между этими двумя сторонами, если периметр треугольника равен $6 + 3\sqrt{2}$ см.

Решение. Поскольку отношение неизвестных сторон равно $\sqrt{2} : 1$, обозначим их через $x\sqrt{2}$ и x . Тогда, записывая периметр треугольника, получим уравнение:

$3 + x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$. Отсюда $x(1 + \sqrt{2}) = 3(1 + \sqrt{2})$, то есть $x = 3$. Значит, неизвестные стороны треугольника равны 3 и $3\sqrt{2}$. Если угол между ними обозначить через α , то по следствию 1 из теоремы косинусов получим: $\cos \alpha = \frac{3^2 + (3\sqrt{2})^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2}}$, то есть $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Это означает, что $\alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Пример 7. Две стороны треугольника равны 5 см и 4 см, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найти третью сторону треугольника.

Решение. Поскольку синус угла α между данными сторонами треугольника равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$, косинус этого угла найдем из соотношения $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$: $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$. Следовательно, $\cos \alpha$ равен $\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{4}$. Применим теперь теорему косинусов для нахождения неизвестной стороны x :

$x^2 = 25 + 16 - 40 \cdot \frac{3}{4}$ или $x^2 = 25 + 16 + 40 \cdot \frac{3}{4}$. То есть $x = \sqrt{11}$ или $x = \sqrt{71}$.

Ответ: $\sqrt{11}$ см или $\sqrt{71}$ см.

Пример 8. Основания трапеции равны 4 см и 11 см, а боковые стороны – 5 см и 6 см. Найти косинусы всех углов трапеции.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $BC = 4$ см, $AD = 11$ см, $AB = 5$ см, $CD = 6$ см, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$.

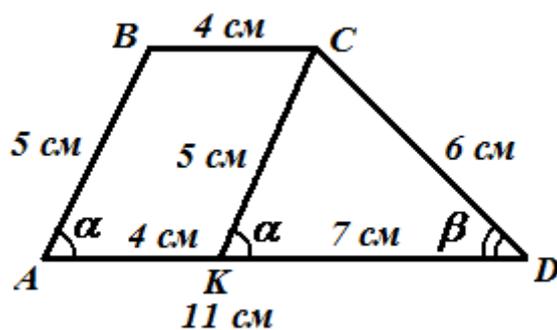


Рис. 6

Проведем через вершину C прямую CK , параллельную AB . Тогда четырехугольник $ABCK$ – параллелограмм, у которого $CK = AB = 5$ см, $AK = BC = 4$ см. В треугольнике KCD $KD = 7$ см, $\angle CKD = \angle BAD = \alpha$. Таким образом, в треугольнике KCD известны длины всех сторон. По следствию 1 из теоремы косинусов получим: $\cos \alpha = \frac{25 + 49 - 36}{70}$, то есть $\cos \alpha = \frac{19}{35}$.

Аналогично, $\cos \beta = \frac{36 + 49 - 25}{84}$, то есть $\cos \beta = \frac{5}{7}$. Поскольку $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, а $\angle BCD = 180^\circ - \beta$, $\cos \angle ABC = -\frac{19}{35}$ и $\cos \angle BCD = -\frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{19}{35}, -\frac{19}{35}, -\frac{5}{7}, \frac{5}{7}$.

Пример 9. В треугольнике ABC $AB = 25$ см, $BC = 30$ см. Расстояние от середины стороны BC до стороны AC равно 12 см. Найти длину стороны AC .

Решение. Пусть M – середина стороны BC , а N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на сторону AB .

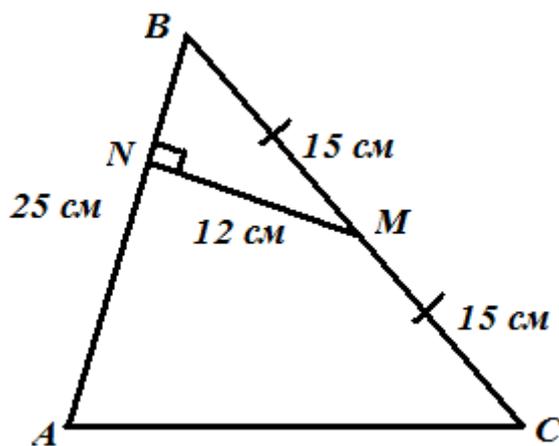


Рис. 7

Тогда, по теореме Пифагора, $BN = 9$ см. Значит, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$. Можно применить теорему косинусов к треугольнику ABC : $AC^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \frac{3}{5}$; $AC^2 = 625 + 900 - 900$; $AC = 25$.

Ответ: 25 см.

Пример 10. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 11 см и 21 см и боковой стороной 13 см.

Решение. Проведем в трапеции $ABCD$ высоты из вершин B и C (рис. 8).

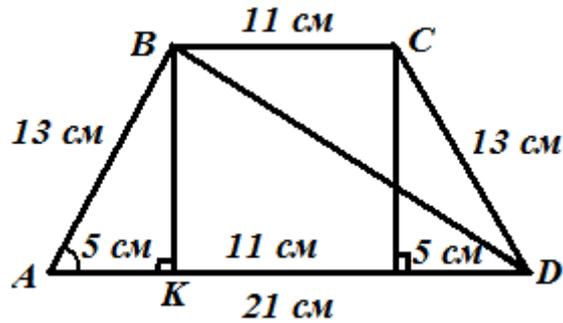


Рис. 8

Отрезок AK равен 5 см. Значит, $\cos \angle BAK = \frac{5}{13}$. Применим теорему косинусов к треугольнику ABD :

$$BD^2 = 13^2 + 21^2 - 2 \cdot 13 \cdot 21 \cdot \frac{5}{13}; \quad BD^2 = 169 + 441 - 210 = 400. \text{ Отсюда } BD = 20 \text{ см.}$$

Ответ: 20 см.

Пример 11. В треугольнике ABC стороны имеют следующие длины: $AB = 9$ см, $BC = 14$ см, $AC = 10$ см. На стороне BC отметили точку K такую, что $BK : KC = 3 : 4$. Найти длину отрезка AK .

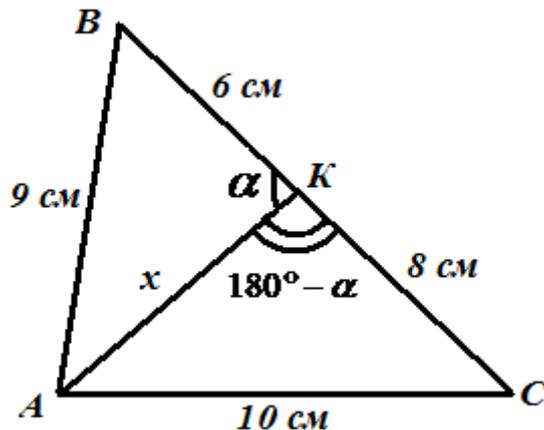


Рис. 9

Решение. 1 способ. Поскольку $BK : KC = 3 : 4$, а $BC = 14$ см, получим, что $BK = 6$ см, $KC = 8$ см. Обозначим угол BKA через α , тогда $\angle AKC = 180^\circ - \alpha$. Если $AK = x$ см, то можем записать теорему косинусов для треугольников ABK и AKC :

$$\begin{cases} 81 = 36 + x^2 - 12x \cos \alpha, \\ 100 = 64 + x^2 + 16x \cos \alpha. \end{cases} \quad \text{Умножая первое уравнение на 4, а второе на 3, получим:}$$

$$\begin{cases} 324 = 144 + 4x^2 - 48x \cos \alpha, \\ 300 = 192 + 3x^2 + 48x \cos \alpha. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения: $624 = 336 + 7x^2$, тогда $x^2 = \frac{288}{7}$, а $x = 12\sqrt{\frac{2}{7}}$.

2 способ. Пользуясь следствием 1, найдем косинус угла ABC : $\cos \angle ABC = \frac{9^2 + 14^2 - 10^2}{2 \cdot 9 \cdot 14}$;
 $\cos \angle ABC = \frac{59}{84}$. Теперь, применяя теорему косинусов к треугольнику ABK , найдем AK :

$$AK^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{59}{84}; \quad AK^2 = \frac{288}{7}; \quad AK = 12\sqrt{\frac{2}{7}}. \quad \text{Ответ: } 12\sqrt{\frac{2}{7}} \text{ см.}$$

Пример 12. Стороны параллелограмма имеют длины 6 см и 11 см, а один из его углов равен 120° . Найти диагонали параллелограмма.

Решение. Если тупой угол параллелограмма равен 120° , то острый его угол равен 60° .
 Применим теорему косинусов к треугольнику BCD :

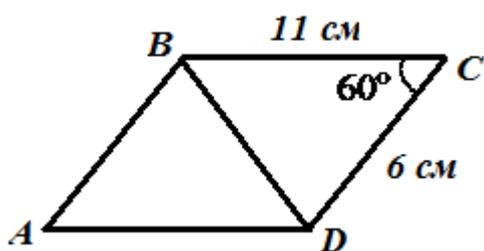


Рис. 10

$$BD^2 = 11^2 + 6^2 - 2 \cdot 11 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2};$$

$$BD^2 = 121 + 36 - 66;$$

$$BD = \sqrt{91}.$$

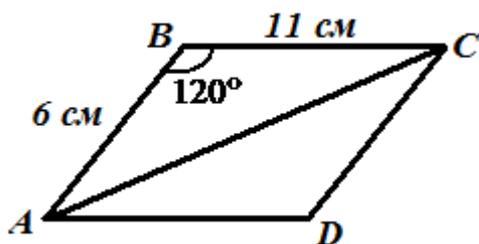


Рис. 11

Применим теорему косинусов к треугольнику ABC :

$$AC^2 = 11^2 + 6^2 + 2 \cdot 11 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2};$$

$$AC^2 = 121 + 36 + 66;$$

$$AC = \sqrt{223}.$$

Ответ: $\sqrt{91}$ см и $\sqrt{223}$ см.

Пример 13. Найти диагонали параллелограмма, если они относятся как 4:7, а стороны параллелограмма равны 7 см и 9 см.

Решение. Введем коэффициент пропорциональности $x > 0$, тогда диагонали параллелограмма можно записать как $4x$ и $7x$. Используя формулу $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ следствия 3, получаем: $16x^2 + 49x^2 = 2(49 + 81)$. Тогда $65x^2 = 260$. Отсюда $x = 2$, а диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см.

Ответ: 8 см и 14 см.

Пример 14. На диагонали прямоугольника со сторонами 10 см и 24 см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 6:7. Найти расстояния от этой точки до всех вершин прямоугольника.

Решение. Если стороны прямоугольника равны 10 см и 24 см, то его диагональ равна 26 см (по теореме Пифагора). Пусть точка M делит диагональ AC в отношении 6:7 (см. рис. 12), тогда $CM = 12$ см и $AM = 14$ см. Обозначим углы BCA и CAD через α . Тогда $\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$. Применим теорему косинусов к треугольникам BMC и AMD :

$$x^2 = 576 + 144 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{12}{13}; \quad y^2 = 196 + 576 - 2 \cdot 14 \cdot 24 \cdot \frac{12}{13}. \quad \text{Отсюда } x = 12\sqrt{\frac{17}{13}} \text{ см, а}$$

$$y = 2\sqrt{\frac{493}{13}} \text{ см.}$$

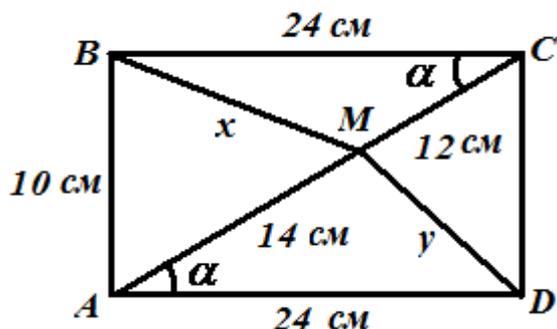


Рис. 12

Ответ: 12 см, 14 см, $12\sqrt{\frac{17}{13}}$ см и $2\sqrt{\frac{493}{13}}$ см.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 30^\circ$. Какова длина стороны AC ?

Ответ: 1.

2. В треугольнике ABC $AC = 3\sqrt{2}$ см, $BC = 7$ см, $\angle C = 45^\circ$. Какова длина стороны AB ?

Ответ: 5.

3. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60^\circ$. Какова длина стороны AC ?

Ответ: 7.

4. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 120^\circ$. Какова длина стороны AC ?

Ответ: $\sqrt{93}$.

5. В треугольнике ABC $AB = 7\sqrt{2}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 135^\circ$. Какова длина стороны BC ?

Ответ: $\sqrt{170}$ см.

6. В треугольнике ABC $AB = 11$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 150^\circ$. Какова длина стороны AC ?

Ответ: $\sqrt{157}$ см.

7. Стороны треугольника равны 6 см, 14 см и 10 см. Найти наибольший угол этого треугольника. **Ответ:** 120° .
8. Стороны треугольника равны $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{39}$ см и 3 см. Найти наибольший угол этого треугольника. **Ответ:** 150° .
9. Стороны треугольника равны 9 см, $\sqrt{41}$ см и $4\sqrt{2}$ см. Найти средний по величине угол этого треугольника. **Ответ:** 45° .
10. Стороны треугольника равны 10 см, 11 см и $\sqrt{111}$ см. Найти средний по величине угол этого треугольника. **Ответ:** 60° .
11. Стороны треугольника равны $6\sqrt{2}$ см, 7 см и $\sqrt{37}$ см. Найти наименьший угол этого треугольника. **Ответ:** 45° .
12. Стороны треугольника равны $7\sqrt{3}$ см, $\sqrt{39}$ см и 12 см. Найти наименьший угол этого треугольника. **Ответ:** 30° .
13. Выяснить вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если он имеет следующие длины сторон: 1) 2 см; 10 см; 9 см; 2) 13 см; 6 см; 12 см; 3) 29 см; 20 см; 21 см; 4) 5 см; 14 см; 15 см; 5) 24 см; 7 см; 25 см; 6) 4 см; 9 см; 10 см.
14. Выяснить вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если он имеет следующие длины сторон: 1) 5 см; 3 см; 7 см; 2) 2 см; 8 см; 9 см; 3) 8 см; 10 см; 11 см; 4) 35 см; 12 см; 37 см; 5) 7 см; 8 см; 12 см; 6) 15 см; 8 см; 17 см.
15. Стороны параллелограмма имеют длины 5 см и $2\sqrt{2}$ см, а один из его углов равен 45° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{13}$ см и $\sqrt{53}$ см.
16. Стороны параллелограмма имеют длины 2 см и $7\sqrt{2}$ см, а один из его углов равен 135° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{74}$ см и $\sqrt{130}$ см.
17. Стороны параллелограмма имеют длины 4 см и $\sqrt{3}$ см, а один из его углов равен 150° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{7}$ см и $\sqrt{31}$ см.
18. Стороны параллелограмма имеют длины 1 см и $3\sqrt{3}$ см, а один из его углов равен 30° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{19}$ см и $\sqrt{37}$ см.
19. Стороны параллелограмма имеют длины 4 см и 9 см, а один из его углов равен 120° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{61}$ см и $\sqrt{133}$ см.
20. Стороны параллелограмма имеют длины 5 см и 12 см, а один из его углов равен 60° . Найти диагонали параллелограмма. **Ответ:** $\sqrt{109}$ см и $\sqrt{229}$ см.
21. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 7 см и 9 см и острым углом 60° . **Ответ:** $\sqrt{67}$ см.
22. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 5 см и 11 см и тупым углом 120° . **Ответ:** $\sqrt{91}$ см.
23. Дан равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найти длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2:3. **Ответ:** $2\sqrt{19}$ см.

24. Дан равносторонний треугольник со стороной 9 см. Найти длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 1:2.

Ответ: $3\sqrt{7}$ см.

25. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с боковой стороной 4 см. На его гипотенузе отмечена точка, делящая гипотенузу в отношении 1:3. Найти расстояние от этой точки до вершины прямого угла треугольника. **Ответ:** $\sqrt{10}$ см.

26. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с боковой стороной 5 см. На его гипотенузе отмечена точка, делящая гипотенузу в отношении 4:1. Найти расстояние от этой точки до вершины прямого угла треугольника. **Ответ:** $\sqrt{17}$ см.

27. Дан прямоугольный треугольник с катетами 6 см и $3\sqrt{5}$ см. На его гипотенузе отмечена точка, делящая гипотенузу в отношении 4:5, считая от вершины меньшего угла. Найти расстояние от этой точки до вершины прямого угла. **Ответ:** $\sqrt{21}$ см.

28. Дан прямоугольный треугольник с катетами 2 см и $2\sqrt{15}$ см. На его гипотенузе отмечена точка, делящая гипотенузу в отношении 3:1, считая от вершины большего угла. Найти расстояние от этой точки до вершины прямого угла. **Ответ:** $\sqrt{6}$ см.

29. На диагонали квадрата со стороной 5 см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 2:3. Найти расстояния от этой точки до всех вершин квадрата.

Ответ: $2\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см, $\sqrt{13}$ см и $\sqrt{13}$ см.

30. На диагонали квадрата со стороной 7 см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 3:4. Найти расстояния от этой точки до всех вершин квадрата.

Ответ: $3\sqrt{2}$ см, $4\sqrt{2}$ см, 5 см и 5 см.

31. На диагонали прямоугольника со сторонами 3 см и $6\sqrt{2}$ см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 1:2. Найти расстояния от этой точки до всех вершин прямоугольника. **Ответ:** 3 см, 6 см, $2\sqrt{3}$ см и $\sqrt{33}$ см.

32. На диагонали прямоугольника со сторонами 6 см и $3\sqrt{5}$ см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 4:5. Найти расстояния от этой точки до всех вершин прямоугольника. **Ответ:** 4 см, 5 см, $2\sqrt{5}$ см и $\sqrt{21}$ см.

33. На сторонах AB , BC и CA равностороннего треугольника отмечены точки K , M и P соответственно так, что $AK:KB = BM:MC = CP:PA = 3:1$. Найти длину стороны треугольника KMP , если длина стороны треугольника ABC равна 8 см. **Ответ:** $2\sqrt{7}$ см.

34. На сторонах AB , BC и CA равностороннего треугольника отмечены точки K , M и P соответственно так, что $AK:KB = BM:MC = CP:PA = 2:3$. Найти длину стороны треугольника KMP , если длина стороны треугольника ABC равна 10 см. **Ответ:** $2\sqrt{7}$ см.

35. Две стороны треугольника равны 4 см и 9 см, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 7 см или $\sqrt{145}$ см.

36. Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см, а синус угла между ними равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.
Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 8 см или $\sqrt{74}$ см.
37. Две стороны треугольника образуют угол в 60° и относятся как 2:3. Найти эти стороны, если третья сторона имеет длину $2\sqrt{7}$ см. **Ответ:** 4 см и 6 см.
38. Две стороны треугольника образуют угол в 60° и относятся как 3:5. Найти эти стороны, если третья сторона имеет длину $\sqrt{19}$ см. **Ответ:** 9 см и 15 см.
39. Две стороны треугольника образуют угол в 120° и относятся как 2:5. Найти эти стороны, если третья сторона имеет длину $\sqrt{13}$ см. **Ответ:** $2\sqrt{3}$ см и $5\sqrt{3}$ см.
40. Две стороны треугольника образуют угол в 120° и относятся как 1:2. Найти эти стороны, если третья сторона имеет длину 7 см. **Ответ:** $\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см.
41. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$ см, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $1:2\sqrt{3}$. Найти эти стороны. **Ответ:** 2 см и $4\sqrt{3}$ см.
42. Сторона треугольника равна 3 см, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $\sqrt{3}:2$. Найти эти стороны. **Ответ:** $3\sqrt{3}$ см и 6 см.
43. Сторона треугольника равна $2\sqrt{13}$ см, а две другие стороны образуют угол в 150° и относятся как $2:\sqrt{3}$. Найти эти стороны. **Ответ:** 4 см и $2\sqrt{3}$ см.
44. Сторона треугольника равна $\sqrt{129}$ см, а две другие стороны образуют угол в 150° и относятся как $\sqrt{3}:5$. Найти эти стороны. **Ответ:** 3 см и $5\sqrt{3}$ см.
45. Одна из сторон треугольника равна 21 см, а две другие стороны относятся как 5:8. Найти величину угла между этими двумя сторонами, если периметр треугольника равен 60 см. **Ответ:** 60° .
46. Одна из сторон треугольника равна 14 см, а две другие стороны относятся как 3:5. Найти величину угла между этими двумя сторонами, если периметр треугольника равен 30 см. **Ответ:** 120° .
47. Одна из сторон треугольника равна 6 см, другая равна $2\sqrt{7}$ см, а противоположный ей угол равен 60° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 2 см или 4 см.
48. Одна из сторон треугольника равна 7 см, другая равна $\sqrt{39}$ см, а противоположный ей угол равен 60° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 2 см или 5 см.
49. Одна из сторон треугольника равна $5\sqrt{2}$ см, другая равна $\sqrt{29}$ см, а противоположный ей угол равен 45° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 3 см или 7 см.
50. Одна из сторон треугольника равна $2\sqrt{2}$ см, другая равна $\sqrt{13}$ см, а противоположный ей угол равен 45° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 5 см.
51. Одна из сторон треугольника равна $\sqrt{3}$ см, другая равна $\sqrt{13}$ см, а противоположный ей угол равен 30° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 5 см.

52. Одна из сторон треугольника равна 2 см, другая равна $\sqrt{103}$ см, а противоположный ей угол равен 120° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 9 см.
53. Одна из сторон треугольника равна 7 см, другая равна $\sqrt{79}$ см, а противоположный ей угол равен 60° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 10 см.
54. Одна из сторон треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, другая равна $\sqrt{65}$ см, а противоположный ей угол равен 135° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 3 см.
55. Одна из сторон треугольника равна $5\sqrt{3}$ см, другая равна $\sqrt{109}$ см, а противоположный ей угол равен 150° . Найти третью сторону треугольника. **Ответ:** 2 см.
56. Две стороны треугольника образуют угол 135° и относятся как $3\sqrt{2}:1$, а третья сторона имеет длину 10 см. Найти периметр треугольника. **Ответ:** $12 + 6\sqrt{2}$ см.
57. В треугольнике ABC стороны имеют следующие длины: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. На стороне BC отметили точку K такую, что $BK:KC = 2:1$. Найти длину отрезка AK .
Ответ: $\sqrt{33}$ см.
58. Стороны параллелограмма равны 1 см и $\sqrt{3}$ см, угол между ними равен 30° . Найти меньшую диагональ параллелограмма. **Ответ:** 1 см.
59. Одна из сторон параллелограмма равна 10 см, меньшая диагональ – 14 см, а острый угол равен 60° . Найти периметр параллелограмма. **Ответ:** 52 см.
60. Диагонали параллелограмма равны 32 см и 10 см, а угол между ними равен 60° . Найти большую сторону параллелограмма. **Ответ:** 19 см.
61. Диагонали параллелограмма равны $2\sqrt{3}$ см и 4 см, а угол между ними равен 30° . Найти меньшую сторону параллелограмма. **Ответ:** 1 см.
62. Две стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей – 12 см. Найти вторую диагональ параллелограмма. **Ответ:** 14 см.
63. Две стороны параллелограмма равны 7 см и 9 см, а одна из диагоналей – 14 см. Найти вторую диагональ параллелограмма. **Ответ:** 8 см.
64. Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а одна из сторон – 9 см. Найти вторую сторону параллелограмма. **Ответ:** 8 см.
65. Диагонали параллелограмма равны 20 см и 30 см, а одна из сторон – 23 см. Найти вторую сторону параллелограмма. **Ответ:** 11 см.
66. Одна из сторон параллелограмма на 5 больше другой, а диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см. Найти стороны параллелограмма. **Ответ:** 10 см и 15 см.
67. Одна из сторон параллелограмма на 10 больше другой, а диагонали параллелограмма равны 18 см и 26 см. Найти стороны параллелограмма. **Ответ:** 10 см и 20 см.
68. Найти стороны параллелограмма, если они относятся как 8:19, а диагонали параллелограмма равны 30 см и 50 см. **Ответ:** 16 см и 38 см.
69. Найти стороны параллелограмма, если они относятся как 6:7, а диагонали параллелограмма равны 21 см и 33 см. **Ответ:** 18 см и 21 см.
70. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 26 см, а диагонали равны 7 см и 11 см. **Ответ:** 6 см и 7 см.
71. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 34 см, а диагонали равны 11 см и 13 см. **Ответ:** 8 см и 9 см.

72. Большее основание равнобокой трапеции равно 7 см, боковая сторона – $5\sqrt{3}$ см, а тупой угол имеет величину 150° . Найти диагональ трапеции. **Ответ:** $\sqrt{19}$ см.
73. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 4 см, боковая сторона – $3\sqrt{2}$ см, а острый угол имеет величину 45° . Найти диагональ трапеции. **Ответ:** $\sqrt{58}$ см.
74. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями $\sqrt{3}$ см и $5\sqrt{3}$ см и острым углом 30° . **Ответ:** $\sqrt{31}$ см.
75. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 7 см и 9 см и острым углом 60° . **Ответ:** $\sqrt{67}$ см.
76. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 5 см и 11 см и тупым углом 120° . **Ответ:** $\sqrt{91}$ см.
77. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 8 см и 14 см и тупым углом 150° . **Ответ:** $2\sqrt{31}$ см.
78. Основания трапеции равны 3 см и 7 см, а боковые стороны – 2 см и 5 см. Найти косинусы всех углов трапеции. **Ответ:** $\frac{37}{40}$, $-\frac{37}{40}$, $\frac{5}{16}$, $-\frac{5}{16}$.
79. Основания трапеции равны 5 см и 11 см, а боковые стороны – 3 см и 4 см. Найти косинусы всех углов трапеции. **Ответ:** $\frac{29}{36}$, $-\frac{29}{36}$, $\frac{43}{48}$, $-\frac{43}{48}$.
80. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 3 см и 5 см и боковой стороной $\sqrt{10}$ см. **Ответ:** 5 см.
81. Найти длину диагонали равнобокой трапеции с основаниями 7 см и 25 см и боковой стороной 15 см. **Ответ:** 20 см.