

Задачи на движение

Решение любой текстовой задачи (не только на движение) складывается из трёх основных моментов:

- а) удачного выбора неизвестных;
- б) составления уравнений и формализации того, что требуется найти;
- в) решения полученной системы уравнений и неравенств.

Почти во всех задачах на движение выбор в качестве неизвестных величин расстояний и скоростей приводит к успешному решению задачи. Если вы составили уравнения, а полученная система не решается, надо попробовать выбрать другие неизвестные. Не бойтесь того, что у вас слишком много неизвестных. Главное – это правильное составление системы. Кроме того, обращайтесь особое внимание на единицы измерения – они в течение всего решения должны быть одинаковыми.

Помните о том, что для превращения высказываний в тексте задачи в уравнения вашей системы необходим лишь здравый смысл. Важно **обязательно** сформулировать при помощи ваших переменных, что вы обязаны найти, поскольку переменных может быть больше, чем уравнений, так что все их найти будет просто невозможно.

Решение систем, которые в таких случаях возникают, рассматривается в курсе школьной программы. Важно всё время помнить о том, что ищется. Кроме того, в текстовых задачах все величины, как правило, положительны (ибо в природе скорости и расстояния положительны). Поэтому можно умножать, делить и возводить в квадрат получающиеся уравнения и неравенства, не делая необходимых оговорок.

Пример 1. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от A до B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстаёт от парохода на 8 км. Если они плывут против течения, то пароход идёт от B до A в два раза быстрее (по времени, а не по скорости), чем катер. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

Решение. Пусть x км/ч – скорость парохода в стоячей воде, y км/ч – скорость катера в стоячей воде, v км/ч – скорость течения и S км – расстояние от A до B .

Скорость парохода по течению составляет $x+v$ км/ч, катера - $y+v$ км/ч. Следовательно, путь в S км пароход пройдёт за $\frac{S}{x+v}$ часов. По условию задачи время парохода будет в полтора раза

меньше, чем время катера. Отсюда получаем первое уравнение: $1,5 \cdot \frac{S}{x+v} = \frac{S}{y+v}$. Полезно по

ходу решения задачи обводить уже готовые уравнения в рамочку, чтобы легко было их потом собирать в систему.

Далее, тот факт, что катер каждый час отстаёт от парохода на 8 км означает просто, что за один час пароход проходит на 8 км больше, чем катер. Пароход проходит за один час $1 \cdot (x+v)$ км, а катер - $1 \cdot (y+v)$ км. Отсюда получаем второе уравнение: $x+v = y+v+8$.

При ходе против течения скорость парохода есть $x-v$ км/ч, а катера - $y-v$ км/ч. Следовательно, пароход пройдёт от A до B за $\frac{S}{x-v}$ ч, а катер – за $\frac{S}{y-v}$ ч. По условию задачи

время парохода в два раза меньше времени катера, т.е. $2 \cdot \frac{S}{x-v} = \frac{S}{y-v}$.

Мы имеем систему:

$$\begin{cases} 1,5 \cdot \frac{S}{x+v} = \frac{S}{y+v} \\ x+v = y+v+8 \\ 2 \cdot \frac{S}{x-v} = \frac{S}{y-v} \end{cases}$$

Из которой надо найти x и y .

Сократив первое и третье уравнения на $S > 0$ и упростив второе, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3S}{2(x+v)} = \frac{1}{y+v} \\ x = y+8 \\ \frac{2}{x-v} = \frac{1}{y-v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+3v = 2x+2v \\ x = y+8 \\ 2y-2v = x-v \end{cases}$$

Последняя эквивалентность имеет место ввиду положительности всех переменных. Из получившейся линейной системы легко находим, что $x = 20$, $y = 12$.

Ответ: Скорость парохода – 20 км/ч; скорость катера – 12 км/ч.

Пример 2. От пристани одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся к пристани через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от пристани.

Решение. Пусть v - скорость катера в стоячей воде, а c - скорость течения. Тогда, исходя из условия задачи, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{v+c} + \frac{96}{v-c} = 14 \\ \frac{96}{v+c} + \frac{96-24}{v-c} = \frac{24}{c} \end{cases}$$

В последнем уравнении разделим знаменатель каждой дроби на c и сделаем замену $k = \frac{v}{c}$.

Тогда уравнение примет вид: $1 = \frac{4}{k+1} + \frac{3}{k-1}$. Преобразовав его, получим:

$k(k-7) = 0$. Отсюда, так как k в ноль не обращается, $k = 7$. Поэтому $v = 7c$ и, подставляя это соотношение в первое уравнение системы, находим, что $c = 2$ км/ч и, соответственно, $v = 14$ км/ч.

Ответ: Скорость течения – 2 км/ч ; скорость лодки – 14 км/ч.

Пример 3. Из A в B выехали одновременно “Жигули”, “Москвич” и “Запорожец”. “Жигули”, доехав до B , повернули назад и встретили “Москвич” в 18 км, а “Запорожец” – в 25 км от B . “Москвич”, доехав до B , также повернул назад и встретил “Запорожец” в 8 км от B . Найдите расстояние от A до B . (Скорости автомобилей постоянны.)

Решение. Пусть x - искомое расстояние (в километрах), v_1, v_2, v_3 - скорости (в км/ч) “Жигулей”, “Москвича” и “Запорожца” соответственно.

Тогда из условий задачи получаем равенства

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x+18}{x-18}, \quad \frac{v_2}{v_3} = \frac{x+8}{x-8} \quad \text{и} \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{x-25}{x+25},$$

перемножив которые, получим уравнение:

$$\frac{(x+18)(x+8)(x-25)}{(x-18)(x-8)(x+25)} = 1.$$

После преобразований придём к уравнению $x^2 = 3600$, которое имеет ровно один положительный корень $x = 60$ км.

Ответ: 60 км.

Пример 4. Пассажир, едущий из A в B , одну половину затраченного на путь времени ехал на автобусе, а вторую – на автомашине. Если бы он ехал от A до B только на автобусе, то это заняло бы в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь от A до B машина, чем автобус?

Решение. Пусть x км/ч – скорость автобуса, y км/ч – скорость автомобиля, S км – расстояние от A до B .

Пусть t часов – затраченное на путь время. Согласно условию $t/2$ ч пассажир ехал в автобусе и столько же – на автомобиле. Значит, он проехал всего $x \cdot \frac{t}{2} + y \cdot \frac{t}{2}$ км, причём это расстояние равно

$$S. \text{ Следовательно, } x \cdot \frac{t}{2} + y \cdot \frac{t}{2} = S, \text{ откуда } t = \frac{2S}{x+y}.$$

В автобусе пассажир проехал весь путь за $\frac{S}{y}$ часов. Учитывая условие задачи, составляем уравнение

$$1,5 \cdot \frac{2S}{x+y} = \frac{S}{y},$$

Из которого надо найти величину $\frac{S/x}{S/y} = \frac{y}{x}$.

Сокращая на S и упрощая, получаем $x = 2y$ или $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: в два раза быстрее.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Турист проехал расстояние между двумя городами за три дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и ещё 60 км, во второй – $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 20 км и в третий день – $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

Ответ: 400 км.

2. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B . Сколько часов в пути до встречи был велосипедист?

Ответ: 4,5 часа.

3. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 минуты. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание за 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

Ответ: 40 км/ч.

4. Первую четверть пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а оставшуюся часть – со скоростью 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд?

Ответ: 64 км/ч.

5. Самолёт летел сначала со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось лететь на 385 км меньше, чем он пролетел, скорость его стала равной 330 км/ч. Средняя скорость самолёта на всём пути 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолёт?

Ответ: 1375 км.

6. Пассажир едет в трамвае и замечает, что параллельно трамвайной линии в противоположном направлении идёт его приятель. Через минуту человек вышел из вагона и, чтобы догнать приятеля, пошёл вдвое быстрее его, но в 4 раза медленнее трамвая. Через сколько минут пассажир догонит приятеля?

Ответ: 9 минут.

7. Пассажир проехал на поезде 120 км, пробыв на станции 40 минут, вернулся с обратным поездом, проходившим в час на 6 км больше, чем первый. Общая продолжительность поездки составила 8 часов. Сколько километров в минуту проезжает каждый поезд?

Ответ: 0,5 км/мин; 0,6 км/мин.

8. Путешественник предполагал пройти 30 км с некоторой скоростью. Но с этой скоростью он шёл всего 1 час, а затем стал проходить в час на 1 км меньше. В результате он прибыл в конечный пункт на 1 час 15 минут позднее, чем предполагал. С какой скоростью путешественник предполагал пройти путь?

Ответ: 5 км/ч.

9. Поезд проходит мост длиной в 450 м за 45 секунд и 15 секунд идёт мимо телеграфного столба. Вычислить длину поезда и его скорость.

Ответ: 225 м; 54 км/ч.

10. Спускаясь по эскалатору, Миша наступил на 50 ступенек, а шагавший втрое быстрее Боря – на 75. Сколько ступенек на эскалаторе?

Ответ: 100 ступенек.

11. Пройдя $\frac{3}{8}$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил автомобиль, приближающийся со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста; если вперёд, автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бежит Иа-Иа?

Ответ: 15 км/ч.

12. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли два паука. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первый паук полз всё время с постоянной скоростью, а второй хотя и поднимался вдвое медленнее первого, но зато спускался вдвое быстрее первого. Какой паук раньше приполз обратно?

Ответ: первый паук.

13. Путь от дома до школы Буратино проделал пешком. Обрато он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути – на

черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи – в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шёл в школу. На какой путь – из дома до школы или из школы до дома – затратил Буратино больше времени?

Ответ: на путь из школы домой.

14. Из города A в город B выезжает первая автомашина, которая проезжает расстояние от A до B за 6 часов. Затем навстречу ей из города B выезжает вторая автомашина, преодолевающая то же расстояние за 8 часов. К моменту встречи вторая автомашина преодолела расстояние в $1\frac{4}{5}$ раза меньше, чем первая. На сколько часов позже выехала вторая автомашина?

Ответ: на 1 час.

15. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу; один из пункта A в пункт B , другой – из пункта B в A . После встречи один из них находился в пути ещё 2 часа, а другой $\frac{9}{8}$ часа. Определите скорости автомобилей, если расстояние между A и B равно 210 км.

Ответ: 60 км/ч; 80 км/ч.

16. Расстояние между городами A и B равно 80 км. Из A в B выехала машина, а через 20 минут – мотоциклист, скорость которого равна 90 км/ч. Мотоциклист догнал машину в пункте C и повернул обратно. Когда мотоциклист проехал половину пути от C к A , машина прибыла в B . Найти расстояние от A до C .

Ответ: 60 км.

17. Три велосипедиста из одного посёлка в одном направлении выезжают с интервалом в 1 час. Первый двигался со скоростью 12 км/ч, второй – 10 км/ч. Третий велосипедист, имея большую скорость, догнал второго, а ещё через 2 часа догнал первого. Найти скорость третьего велосипедиста.

Ответ: 20 км/ч.

18. Из M в N со скоростью 80 км/ч выезжает автомобиль. Одновременно из N в M со скоростью 60 км/ч выезжает второй автомобиль. Через 1 час вслед за первым автомобилем выезжает третий автомобиль, который сначала догоняет первый автомобиль, а ещё через час после этого встречается со вторым. Найти скорость третьего автомобиля, зная, что она меньше 200 км/ч, а расстояние между пунктами M и N равно 860 км.

Ответ: 100 км/ч.

19. Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на 1 час раньше, чем легковой автомобиль.

Ответ: 72 км/ч.

20. Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через час из пункта A выехал легковой автомобиль. Через 2 часа после выезда он догнал грузовик и прибыл в пункт B на 3 часа раньше грузовика. Сколько времени грузовик ехал от A до B ?

Ответ: 12 часов.

21. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошёл половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошёл

половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров остаётся пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

Ответ: 8 км.

22. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через час. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 часа 20 минут. Определить скорости лодки и парусника.

Ответ: 18 км/ч; 12 км/ч.

23. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошёл четверть пути от A до B , второму до середины пути оставалось идти 1,5 км, а когда второй пешеход прошёл половину пути от B до A , первый находился на расстоянии 2 км от второго. Найдите расстояние от A до B , если известно, что второй пешеход шёл быстрее первого.

Ответ: 12 км.

24. В течение 7 ч 20 мин судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось обратно. Скорость течения равна 4 км/ч. С какой скоростью судно шло по течению?

Ответ: 15 км/ч.

25. Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на 18 км и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 ч 45 мин. Найти собственную скорость лодки, если известно, что 6 км по течению реки лодка проплывает на 5 минут быстрее, чем против течения.

Ответ: 21 км/ч.

26. Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на 20 км и поднялась вверх по притоку ещё на 10 км, затратив на весь путь 1 ч 10 мин. На обратный путь лодке потребовалось 1 ч 20 мин. Зная, что скорость течения реки равна скорости течения притока, найти собственную скорость лодки.

Ответ: 25 км/ч.

27. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек. Если пассажир идёт с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?

Ответ: 56 сек.