Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»
Донецкий республиканский институт дополнительного педагогического образования

Решения заданий заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

11 класс

1. Известно, что $f(x)=\dfrac{4x^4+3}{3x}$ и $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. Найти все значения переменной *x*, при которых $f'(x)$ не больше, чем $g'(x)$.

Решение. Первую функцию запишем в следующем виде: $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{x}$, а вторую – $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Тогда $f'(x)=4x^2-\dfrac{1}{x^2}$ и $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$. Обе функции, а также их производные, определены на всей числовой оси, кроме точки 0. Неравенство $f'(x)\le g'(x)$ на этом промежутке имеет вид: $4x^2-\dfrac{1}{x^2}\le 1-\dfrac{1}{x^2}$ или $4x^2-1\le 0$. Отсюда $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ и при этом $x\ne 0$.

Ответ: $x\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

2. Найти все целочисленные решения неравенства $x^2+2\cos\pi x-3<0$.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде: $x^2<3-2\cos\pi x$. Так как $3-2\cos\pi x\le 5$, то $x^2<5$. Следовательно, целые решения неравенства могут содержаться только среди чисел 0, ±1; ±2. Учитывая, что в обеих частях неравенства – четные функции, достаточно проверить числа 0, 1 и 2 путем непосредственной подстановки. Проверкой убеждаемся, что числа 0 и 1 являются решениями данного неравенства, а число 2 – не является.

Ответ: 0, ±1.

3. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ для всех натуральных *n*. Известно, что $a_3=9$, $a_6=128$. Найти a_5.

Решение. При *n* = 3 из формулы получаем: $a_5=2a_4+a_3$. При *n* = 4 из формулы получаем: $a_6=2a_5+a_4$. Подставляя данные значения в эти равенства, получим систему: $\begin{cases} a_5=2a_4+9, \\ 128=2a_5+a_4. \end{cases}$.

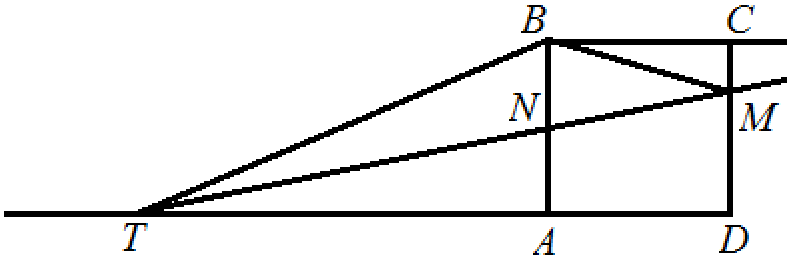
Решая эту систему, находим, что $a_5=53$.

Ответ: 53.

4. Прямая, проведённая через середину *N* стороны *AB* квадрата *ABCD*, пересекает прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* соответственно и образует с прямой *AB* угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна 8.

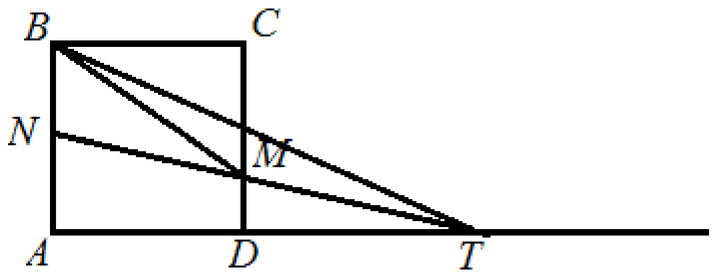
Решение. Указанная прямая может пересекать прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* так, что эти точки лежат по разные стороны от *N*, или так, что по одну сторону от нее. В зависимости от этого получаем два различных случая

1) Из треугольника ANT: $AN = 4$; $tg\angle TNA = 4$, следовательно, $AT = 16$. Треугольник BMT



состоит из двух частей: треугольников BNT и BNM. Площадь треугольника BNT: $S_{BNT} = \frac{1}{2}BN \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32$; площадь треугольника BNM: $S_{BNM} = \frac{1}{2}BN \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$, $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BNM} = 32 + 16 = 48$.

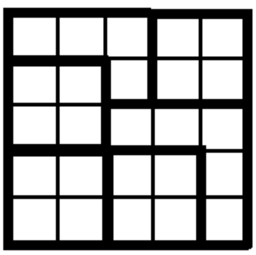
2) Из треугольника ANT: $AN = 4$; $tg\angle TNA = 4$, следовательно, $AT = 16$. Площадь

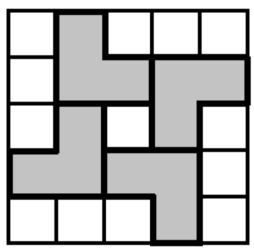


треугольника BMT является разностью площадей треугольников BNT и BNM. Площадь треугольника BNT: $S_{BNT} = \frac{1}{2}BN \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32$; площадь треугольника BNM: $S_{BNM} = \frac{1}{2}BN \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$, $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BNM} = 32 - 16 = 16$.

Ответ: 48 или 16.

5. Какое наименьшее количество трехклеточных уголков нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше нельзя было покрасить ни одного уголка (уголки не должны перекрываться)?





Решение. Предположим, что в квадрате 5×5 покрасили несколько уголков и больше ни одного уголка покрасить нельзя. Разобьем квадрат 5×5 на 4 квадратика 2×2 и два уголка из четырех и пяти клеток соответственно (см. рисунок). Понятно, что в каждом таком квадратике не менее двух клеток окрашено и в каждом из двух уголков закрашено хотя бы по одной клетке (если в любом квадратике окрашена только одна или ни одной, можно окрасить трехклеточный уголок, так же и в двух оставшихся фигурках, если в них нет окрашенных клеток). Поскольку квадратиков 2×2 всего 4, окрашенных клеток в них не менее 8. Еще в двух оставшихся фигурках не менее двух окрашенных клеток. Это означает, что окрашенных клеток не менее 10, то есть трехклеточных уголков не менее 4. Пример с четырьмя окрашенными уголками, когда нельзя больше окрасить ни одного, приведен на втором рисунке.

Ответ: 4.