Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»
Донецкий республиканский институт дополнительного педагогического образования

Решения заданий заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

8 класс

1. Решить уравнение: $\dfrac{2x}{x+\dfrac{x-1}{x-1}}=x$.

Решение. Из уравнения после сокращения получаем следствие: $\dfrac{2x}{x+1}=x$. Умножая на знаменатель левой части, переходим к следствию: $2x=x(x+1)$. После преобразований получаем: $x(x+1)-2x=0$; $x(x+1-2)=0$; $x(x-1)=0$. Отсюда $x=0$ или $x=1$. Поскольку среди полученных значений могут быть посторонние, сделаем проверку. Условию удовлетворяет только $x=0$.

Ответ: $x=0$.

2. В первый день продали 120 кг картофеля, что составило 40% всего запаса, во второй день – 25% оставшегося картофеля, в третий день – оставшийся картофель. Сколько килограммов картофеля продали в третий день?

Решение. Поскольку 120 кг составляют 40% всего запаса, весь запас составляет $\dfrac{120\cdot 100}{40}=300$ кг. Во второй день продали 25% остатка, то есть 0,25 от 180 кг: $\dfrac{1}{4}\cdot 180=45$ кг. Значит, на третий день осталось продать $180-45=135$ кг.

Ответ: 135 кг.

3. Известно, что 3 банана, 7 яблок и 1 ананас стоят вместе 329 рублей. А 4 банана, 10 яблок и 1 ананас стоят вместе 441 рубль. Сколько стоят вместе 1 банан, 1 яблоко и 1 ананас?

Решение. Пусть 1 банан стоит x рублей, 1 яблоко – y рублей, а один ананас – z рублей. Из условия получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases}3x+7y+z=329,\\ 4x+10y+z=441.\end{cases}$ Дальше можно, например, несложными преобразованиями выразить x и z через y: $x=112-3y$; $z=2y-7$. Тогда $x+y+z=112-3y+y+2y-7=105$. Этот ответ можно получить и по-другому. Умножим первое уравнение системы на 3, а второе – на 2 и вычтем полученные равенства:

$$\begin{cases}3\cdot(3x+7y+z)=3\cdot 329,\\ 2\cdot(4x+10y+z)=2\cdot 441.\end{cases}$$

$3(3x+7y+z)-2(4x+10y+z)=987-882$; $\quad x+y+z=105$.

Ответ: 105 рублей.

4. К числу 2017 припишите справа две цифры так, чтобы полученное число делилось на 36.

Решение. Чтобы число делилось на 36, оно должно делиться на 9 и на 4. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9, то есть две приписываемые цифры должны давать в сумме 8 или 17. Если их сумма равна 8, то возможные варианты приписываемых цифр следующие: 08, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80. Если их сумма равна 17, то возможны еще два варианта: 89 и 98. Для делимости на 4 нужно, чтобы число, образованное двумя последними цифрами, делилось на 4. Этому условию удовлетворяют только 08, 44 и 80.

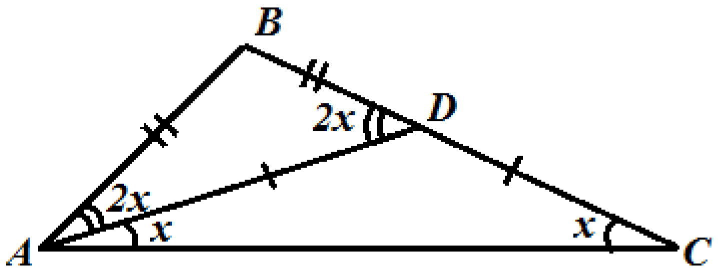
Ответ: 201708, 201744, 201780.

5. Дан треугольник, один из углов которого равен 120°. Известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Найдите два остальных угла исходного треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle ABC = 120°$. Разрез, указанный в условии задачи, должен проходить через вершину треугольника (иначе при разбиении не получится два треугольника).

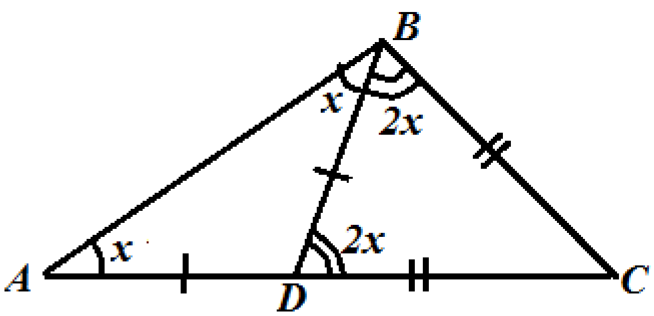
При этом, он может проходить как через вершину B, так и через вершину одного из острых углов.

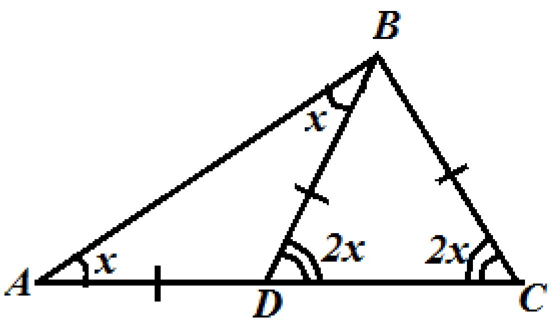
Рассмотрим сначала разрез через вершину A (см. рисунок). Тогда оба полученных треугольника тупоугольные и равными в них могут быть только стороны, заключающие тупой угол.

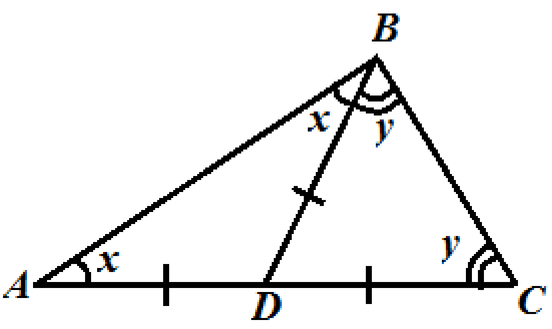


Пусть $\angle DAC = \angle DCA = x$, тогда $\angle ADB = \angle DAB = 2x$. Поскольку $\angle ABC = 120°$, сумма углов BAC и ACB исходного треугольника равна 60°, поэтому $3x + x = 60$. Отсюда $x = 15$ и $\angle ACB = 15°$, $\angle BAC = 45°$.

Рассмотрим разрез через вершину угла B (см. рисунки). При этом один из углов ADB и BDC тупой. Пусть это угол ADB. Тогда для треугольника BDC возможны три варианта двух равных сторон.







Из первого рисунка получаем, что $3x = 120$ или $x = 40$ и $\angle BAC = 40°, \angle ACB = 20°$. Из второго рисунка получаем, что $3x = 60$ или $x = 20$ и $\angle BAC = 20°, \angle ACB = 40°$. Третий рисунок не удовлетворяет условию, поскольку сумма углов x и y оказывается равна $90°$, а по условию этот угол 120°.

Ответ: 40° и 20° или 45° и 15°.