Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»
Донецкий республиканский институт дополнительного педагогического образования

# Решения заданий заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

## 9 класс

**1.** Решить неравенство: $x \le 4 - \dfrac{9}{x+2}$.

***Решение.*** Выполним равносильные преобразования: $x - 4 + \dfrac{9}{x+2} \le 0$; $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+2} \le 0$; $\dfrac{(x-1)^2}{x+2} \le 0$. Решая методом интервалов, получаем: $x \in (-\infty; -2) \cup \{1\}$.

***Ответ:*** $x \in (-\infty; -2) \cup \{1\}$.

**2.** На цветочной клумбе росли кусты роз и пионов. Пионов среди них было 60%. Весной на клумбу посадили розы, после чего пионов стало 20%. А осенью посадили пионы, и пионов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество цветов за год?

***Решение.*** До начала посадок розы составляли $\dfrac{2}{5}$, а пионы - $\dfrac{3}{5}$ всех цветов на клумбе. К лету число пионов не изменилось, однако они стали составлять $\dfrac{1}{5}$ всех цветов. Следовательно, количество всех цветов на клумбе увеличилось втрое. При этом розы составляли $\dfrac{4}{5}$ всех цветов. К зиме не изменилось количество роз, но они стали составлять $\dfrac{2}{5}$ всех цветов. Следовательно, количество всех цветов увеличилось ещё вдвое. Таким образом, за год количество цветов увеличилось в 6 раз.

***Ответ:*** в 6 раз.

**3.** Найти наименьшее натуральное число, все цифры которого различны, сумма цифр которого равна 31.

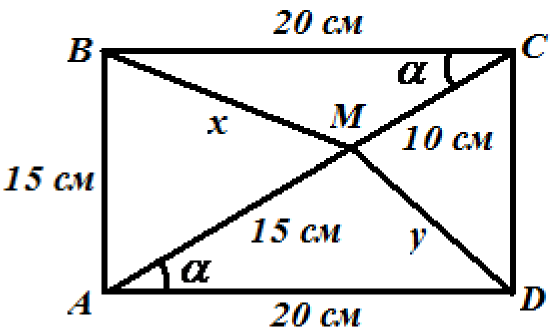
***Решение.*** Сумма четырех самых больших цифр равна 30: $9+8+7+6=30$. Значит, цифр должно быть не менее пяти и наименьшее число должно быть пятизначным. Меньше, чем с 1 оно начинаться не может. Если же на первом месте стоит 1, то получаем 16789.

***Ответ:*** 16789.

**4.** На диагонали прямоугольника со сторонами 15 см и 20 см отмечена точка, делящая эту диагональ в отношении 2:3. Найти расстояния от этой точки до всех вершин прямоугольника.

***Решение.*** Если стороны прямоугольника равны 15 см и 20 см, то его диагональ равна 25 см (по теореме Пифагора). Пусть точка $M$ делит диагональ $AC$ в отношении 2:3 (см. рис.), тогда

$CM = 10$ см и $AM = 15$ см. Обозначим углы $BCA$ и $CAD$ через $\alpha$. Тогда $\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Применим теорему косинусов к треугольникам $BMC$ и $AMD$: $x^2 = 400 + 100 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$; $y^2 = 225 + 400 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \frac{4}{5}$. Отсюда $x = 6\sqrt{5}$ см, а $y = \sqrt{145}$ см.




***Ответ:*** 10 см, 15 см, $6\sqrt{5}$ см и $\sqrt{145}$ см.

**5.** Купили 88 яблок. Когда измерили их средний вес, оказалось, что он равен 100 г. Затем отложили те яблоки, которые легче 100 г. Их средний вес оказался равен 85 г. А средний вес тех яблок, которые тяжелее 100 г, равен 135 г. Какое наименьшее число яблок может иметь вес ровно 100 г?

***Решение.*** Пусть было $x$ яблок легче 100 г и $y$ яблок тяжелее 100 г. Их общий вес равен $85x+135y$ г, а средний – 100 г, откуда получаем $85x+135y = 100(x+y)$ , или $35y=15x$ ; $7y=3x$. Значит, $y$ кратно 3, $x$ кратно 7, и можем записать: $x=7k$, $y=3k$, где $k$ – целое число. Тогда $x+y=10k$ – кратно 10. Поэтому яблок, чей вес не равен 100 г, не более 80. Значит, яблок с весом 100 г не менее 8. Пример, реализующий эту ситуацию, может быть таким: 8 яблок по 100 г, 56 яблок по 85 г и 24 яблока по 135 г.

***Ответ:*** 8 яблок, например, 8 яблок по 100 г, 56 яблок по 85 г и 24 яблока по 135 г.