МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ДОНЕЦКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Отдел образования администрации г. Тореза
Лицей «СПЕКТР» г. Тореза

СОГЛАСОВАНО
Донецкий республиканский
институт дополнительного
педагогического образования
Протокол заседания
Ученого совета от__ _______ 20___ №_____

УТВЕРДЖЕНО
Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики

Приказ от __ _______ 20___ №_____

Программа факультативного курса

# «Подготовка к ГИА.
# Практикум по решению уравнений и неравенствам»

10-11 классы, математический профиль (70 часов)

Составители:
Шамдан Н.А.,
учитель математики, специалист
высшей категории, «старший учитель»
Кирилюк Н.А.,
учитель математики, специалист
высшей категории, «старший учитель»

ДОНЕЦК – 2016

*«Одобрено к использованию*
*в образовательных организациях»*

Министерство образования и науки ДНР
*Приказ от*_________________*№* _________

*Рецензенты:*

1. Фомина Н.В., учитель математики, специалист высшей категории, «учитель-методист», гимназия общественно-гуманитарного профиля г. Тореза

2. Колесник О. А., директор лицея «СПЕКТР», учитель математики и информатики, специалист высшей категории, лицей «СПЕКТР» г. Тореза

(Ф.И.О., должность, научная степень, звание, место работы)

*Составитель:*

Шамдан Н.А., учитель математики, специалист высшей категории, «старший учитель», лицей «СПЕКТР» г. Тореза

Кирилюк Н.А учитель математики, специалист высшей категории, «старший учитель», лицей «СПЕКТР» г. Тореза

(Ф.И.О., должность, научная степень, категория, звание, место работы)

Программа факультативного курса по математике предназначена для учителей, работающих в 10-11 классах общеобразовательных учебных заведений для подготовки и успешной сдачи выпускниками ГИА, ЕГЭ, и их поступлению и обучению в ВУЗах; углубления и расширения знаний; развития математических способностей; формирования активного познавательного интереса к предмету; привития школьникам навыков самостоятельной исследовательской работы; создания условий для достижения каждым учеником практической компетентности.

(краткая аннотация к программе)

**Автор (составитель)**

Шамдан Н.А., учитель математики, «старший учитель»,

специалист высшей категории ___________________________________

Кирилюк Н.А., учитель математики, «старший учитель»,

специалист высшей категории ___________________________________

(Ф.И.О., должность, ученая степень, педагогическое звание, категория)

**Рецензенты:** Фомина Н.В., учитель математики,

«учитель-методист», специалист высшей категории____________(теоретик)

(Ф.И.О., должность, ученая степень, педагогическое звание, категория)

Колесник О. А., директор лицея «СПЕКТР», учитель математики и

информатики, специалист высшей категории __________________(практик)

(Ф.И.О., должность, ученая степень, педагогическое звание, категория)

**Утверждено педагогическим советом школы**

(протокол от "______" _____________ 2016__№ _____)

Директор _________ О. А. Колесник

М.П. (подпись) (Ф.И.О. директора)

**Согласовано с методическим центром (кабинетом)**

Директор (заведующий) _____________________ ______________

М.П. (подпись)

**Научно-методическая экспертиза ДонРИДПО:**

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

# Пояснительная записка

Государственный образовательный стандарт среднего общего образования определяет основные задачи III ступени среднего общего образования:

обеспечение должного уровня общеобразовательной подготовки обучающихся, удовлетворение их образовательных запросов в соответствии с профессиональными намерениями, интересами и способностями;

предоставление учащимся равных возможностей выбора факультативных занятий;

создание условий для овладения обучающимися различными видами познавательной, творческой и коммуникативной деятельности, формирования готовности к продолжению образования;

обеспечение преемственности в содержании, методах и формах обучения в общеобразовательных организациях, организациях, обеспечивающих получение высшего профессионального образования.

*Основная задача обучения математике в школе* – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования. От степени реализации данных задач зависит достижение учащимися положительных результатов на итоговой аттестации.

*Актуальность*. Введение в школе факультативных занятий приводит к разделению учебного материала на основной, обязательный для всех учащихся, и дополнительный, рассчитанный на удовлетворение повышенных интересов отдельных учеников, что дает возможность повысить уровень общего образования, не допуская перегрузки ребят обязательными учебными предметами. Это позволяет найти правильное решение в преодолении серьезного противоречия: неизбежность внесения нового материала в учебные программы и необходимость предупреждения учебной перегрузки учащихся. Кроме этого проведение факультативных занятий позволяет апробировать новое содержание и методику обучения, новое оборудование, что способствует усовершенствованию школьного образования.

Данный факультатив рассчитан на учащихся 10-11 классов, для помощи им в поступлении в различные типы учебных заведений и достижения положительных результатов на итоговой аттестации, а также преодоления проблем адаптации первокурсников связанные с большой разницей требований при обучении в школе и в вузах.

Факультативный курс состоит из 35 занятий, продолжительностью – 1час, в 10 классе и 35 занятий, продолжительностью – 1час, в 11 классе.

*Основная методическая установка факультатива* – организация самостоятельной работы учащихся при ведущей, направляющей роли учителя.

Программа факультатива составлена на принципе системного подхода к изучению математики. Она включает содержание курса математики соответствующих классов общеобразовательной школы, и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу, расширяющих и углубляющих его по основным идейным линиям, а также включены самостоятельные разделы.

Такой подход определяет следующие тенденции:

1. Создание в совокупности с основными разделами курса базы для удовлетворения интересов и развития способностей учащихся, имеющих склонность к математике и ориентированных на профили, где математика заявлена как профильный общеобразовательный предмет.
2. Восполнение содержательных пробелов основного курса, придающее содержанию расширенного изучения необходимую целостность.

Программа предусматривает возможность изучения содержания курса с различной степенью полноты и не ограничивает учителя в творческом поиске.

Большая часть данного факультативного курса посвящена рассмотрению методов решения уравнений и неравенств разных типов, исходя из анализа структуры и содержания заданий ГИА и тестов по математике, предлагаемые центрами тестирования.

*Данный выбор был мотивирован тем, что:*

- количество заданий, сводящихся к решению уравнений или неравенств, на экзаменах колеблется от 35% до 50% (тесты централизованного тестирования за 2010-2015 год);
- преобразования, используемые при решении уравнений, применяются и при упрощении алгебраических выражений, и при решении задач.

Таким образом, рассмотрение этих двух линий способствует успешности выполнения в среднем 70% от числа всех заданий в тесте на ЕГЭ и ГИА.

Данный курс также рассматривает методы решения задач с параметрами, логических, текстовых задач; заданий, с использованием формул арифметической и геометрической прогрессий; задач по стереометрии и планиметрии; задач по комбинаторике и теории вероятностей. Кроме этого включены занятия по подготовке к итоговому тестированию и работа над ошибками.

Для определения целей, форм обучения и организации занятий каждой темы факультативного курса был проведен анализ школьных учебников, по которым занимаются в школах. Анализу были подвергнуты учебники алгебры Макарычева Ю.Н. и Алимова Ш.А., и учебники геометрии Атанасяна Л.С. Результаты по определения целей, форм обучения и организации занятий представлены в приложении 1.

<u>*Цель проведения факультатива:*</u>

- расширение и углубление знаний по математике;
- совершенствование базовых математических знаний обучающихся за курс 5 – 11 классов;

- совершенствование навыков самостоятельной работы с таблицами, со справочной литературой, интернет ресурсами;
- создание условий для формирования и развития  у обучающихся навыков анализа и систематизации полученных ранее знаний и умений.
- формирование и развитие  аналитического и  логического мышления;
- развитие практических навыков и умений;
- развитие исследовательской деятельности;
- развитие коммуникативных и общеучебных  навыков работы в группе, умений вести дискуссию и т.д.

*Изучение материалов, положенных в основу факультативного курса, предусматривает следующие цели:*

*обучающие:*

1) систематизировать знания учащихся по темам «Решение текстовых задач», «Арифметическая и геометрическая прогрессии», «Решение задач по планиметрии и стереометрии», «Решение задач по теории вероятностей»;
2) систематизировать и расширить знания учащихся о методах решения рациональных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических, показательных, уравнений, систем, неравенств;
3) ознакомить учащихся с методами решений уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, и уравнений, содержащих переменную под знаком модуля;
4) рассмотреть способы решения задач с параметрами и логических задач;

*развивающие*:

1) развитие математических способностей у учащихся;
2) формирование умений составления плана решения и прогнозирования результатов;
3) формирование предметных и общеинтелектуальных умений и навыков, навыков учебно-познавательной деятельности и самообразования;
4) формирование навыков самоконтроля;

5) развитие различных видов мышления, культуры исследовательской деятельности;

*воспитательные:*

1) воспитание у учащихся внимания и аккуратности при ведении математических записей;

2) воспитание умения слушать участников образовательного процесса, выделять главное в услышанном;

*Основные принципы*:

опережающая сложность; смена приоритетов; вариативность; самоконтроль.

*Виды деятельности на занятиях:*

фрагментарная лекция; беседа; практикум; консультация; создание проектов; работа с интернет ресурсами; семинар; пробное тестирование.

## *Предполагаемые результаты*

Программа обеспечивает достижение следующих результатов:

*личностные:*

1) сформированность способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному построению индивидуальной образовательной траектории с учѐтом устойчивых познавательных интересов;

2) сформированность коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками в образовательной, учебно-исследовательской, творческой видах деятельности;

4) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

6) критичность мышления, креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;

8) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

*метапредметные:*

1) умение самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения задач;

2) умение осуществлять контроль по результату и по способу действия и вносить необходимые коррективы;

3) умение адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;

4) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логическое рассуждение, делать умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и выводы;

5) умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, взаимодействие и общие способы работы; умение работать в группе: находить общее решение; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

6) сформированность и развитие учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ-компетентности);

7) первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов;

8) умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера.

*предметные:*

1) умение работать с математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли в устной речи и письменной форме;

2) владение базовым понятийным аппаратом: иметь представление о числе, арифметическом корне, логарифме, выражениях;

3) умение выполнять алгебраические преобразования рациональных иррациональных, показательных, тригонометрических и логарифмических выражений;

4) умение решать линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы и неравенства, а также приводимые к ним уравнения, неравенства, системы;

5) умения решать уравнения содержащие переменную под знаком модуля, уравнения с параметром; основные типы задач с параметрами; основные способы решения задач с параметрами;

6) умение решать текстовые задачи, логические задачи и задачи на нахождение частоты и вероятности случайных событий;

7) умение решать планиметрические и стереометрические задачи на нахождение геометрических величин;

8) умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры и геометрии, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, исследовать полученные и построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, с использованием аппарата алгебры;

Учебно- тематический план как в 10 так и в 11 классах составлен с учетом четвертей и семестров в общеобразовательных учебных заведениях. К программе прилагаются материалы, которые учителя могут использовать при составлении поурочного плана факультативных занятий. Также рекомендуется, проводить спаренные занятия, что поспособствует быстрой адаптации учащихся при их дальнейшем обучении в ВУЗах.

# Учебно - тематический план 10 класс.

| Наименование разделов и тем | Количество часов | | | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|
| | Всего | Теория | Практика | |
| Общая характеристика ГИА, независимого тестирования, *ЕГЭ* | **2** | | **2** | Практикум |
| **Раздел 1.** *Текстовые задачи* | **6** | **1** | **5** | Семинар - практикум |
| 1.1 Задачи на движение, задачи на работу | 2 | | 2 | |
| 1.2 Задачи на проценты, задачи на смеси и сплавы | 2 | | 2 | |
| 1.3 Задачи с применением прогрессий, логические задачи | 2 | 1 | 1 | |
| **Раздел 2.** *Действительные числа.* | **8** | **1** | **7** | Защита проектов |
| 2.1 Тождественные преобразование дробно-рациональных выражений. | 2 | | 2 | |
| 2.2 Тождественные преобразование иррациональных выражений.. | 2 | | 2 | |
| 2.3 Тождественные преобразование логарифмических выражений. | 2 | | 2 | |
| 2.4 Модуль действительного числа | 2 | 1 | 1 | |
| **Раздел 3.** *Уравнения.* | **16** | **3** | **13** | Тестовые задания |
| 3.1 Решение рациональных уравнений. | 2 | | 2 | |
| 3.2 Решение иррациональных уравнений. | 2 | | 2 | |
| 3.3 Решение показательных и логарифмических уравнений. | 2 | | 2 | |
| 3.4 Тригонометрические уравнения. | 4 | 1 | 3 | |
| 3.5 Уравнения с модулем . | 3 | 1 | 2 | |
| 3.6 Уравнения с параметрами. | 3 | 1 | 2 | |
| **Итоговое тестирование** | **3** | | **3** | Практикум |
| Итоговое тестирование | 2 | | 2 | |
| Работа над ошибками | 1 | | 1 | |
| ***итого*** | ***35*** | ***5*** | ***30*** | |

# Учебно - тематический план 11 класс

| Наименование разделов и тем | Количество часов | | | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|
| | Всего | Теория | Практика | |
| Общая характеристика ГИА, независимого тестирования, *ЕГЭ* | **2** | | **2** | Практикум |
| **Раздел 4.** *Неравенства.* | **14** | **2** | **12** | Семинар - практикум |
| 4.1 Метод интервалов | 2 | | 2 | |
| 4.2 Иррациональные неравенства | 2 | | 2 | |
| 4.3 Показательные и логарифмические неравенства. | 2 | | 2 | |
| 4.4 Тригонометрические неравенства. | 2 | | 2 | |
| 4.5 Неравенства с модулем. | 3 | 1 | 2 | |
| 4.6 Неравенства с параметром. | 3 | 1 | 2 | |
| **Раздел 5.** *Решение геометрических задач.* | **10** | **1** | **9** | Защита проектов |
| 5.1 Задачи по планиметрии | 4 | | 4 | |
| 5.2 Задачи по стереометрии | 6 | 1 | 5 | |
| **Раздел 6**. *Задачи по теории вероятностей.* | **4** | **1** | **3** | Тестовые задания |
| 6.1 Комбинаторные задачи | 2 | | 2 | |
| 6.2 Задачи с применением вероятностных правил. | 2 | 1 | 1 | |
| **Итоговое тестирование** | **5** | | **5** | Практикум |
| Подготовка к итоговому тестированию | 2 | | 2 | |
| Итоговое тестирование | 2 | | 2 | |
| Работа над ошибками | 1 | | 1 | |
| ***итого*** | ***35*** | ***4*** | ***31*** | |

**Программа факультативного курса**

**«Подготовка к ГИА. Практикум по решению уравнений и неравенств»**

| № | Название раздела, темы | Содержание учебного материала | Кол-во часов | Планируемые результаты (требования к учебным достижениям учащихся) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | *Введение* | Общая характеристика ГИА и ЕГЭ | 4 | *Учащиеся должны знать:*<br>- характеристики тестов.<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>- рационально использовать время для решения тестов. |
| 2 | **Раздел 1.**<br>*Текстовые задачи* | 1.1.<br>Задачи на движение, задачи на работу.<br>1.2.<br>Задачи на проценты, задачи на смеси и сплавы.<br>1.3.<br>Задачи с применением прогрессий, логические задачи. | 6 | *Учащиеся должны знать:*<br>- алгоритмы решения основных (базовых) задач;<br>- типы задач и методы их решения;<br>- зависимости между величинами (скорость, время и расстояние; цена, количество и стоимость и т. д.);<br>- формулы арифметической и геометрической прогрессий;<br>- законы логики.<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>- составлять математические модели задач;<br>- решать текстовые задачи, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | требующие использования зависимостей между величинами ;<br>- решать текстовые задачи на проценты, совместную работу;<br>- решать задачи на смеси и сплавы;<br>- решать задачи с применением прогрессий;<br>- решать логические задачи. |
| 3 | **Раздел 2.** *Действительные числа* | 2.1 Тождественные преобразование дробно-рациональных выражений.<br>2.2. Тождественные преобразование иррациональных выражений.<br>2.3 Тождественные преобразование показательных и логарифмических выражений.<br>2.4<br>Модуль действительного числа. | 8 | *Учащиеся должны знать:*<br>- что такое число, модуль числа, выражения, корни, степени, логарифмы;<br>-способы преобразования выражений;<br>- теорему Безу, схему Горнера.<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>-применять теорему Безу, схему Горнера, делить многочлен на многочлен;<br>-применять свойства модуля для упрощения числовых выражений, содержащих модули;<br>- находить значения корня натуральной степени, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | степени с рациональным показателем, логарифма;<br>- выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы;<br>- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;<br>- проводить по известным формулам и правилам тождественные преобразования выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы;<br>-правильно находит ОДЗ выражения с радикалами и степенями с целым, рациональным и иррациональным показателями. |
| 4 | **Раздел 3.**<br>*Уравнения* | 3.1<br>Решение рациональных уравнений.<br>3.2.<br>Решение иррациональных уравнений. | 16 | *Учащиеся должны знать:*<br>- алгоритмы и приемы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных, иррациональных, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3.3<br>Решение показательных и логарифмических уравнений.<br>3.4.<br>Тригонометрические уравнения.<br>3.5.<br>Уравнения с модулем.<br>3.6.<br>Уравнения с параметрами. | | показательных, тригонометрических и логарифмических уравнений;<br>- способы решения уравнений содержащих переменную под знаком модуля;<br>- определение параметра; примеры решения уравнений с параметром;<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>- решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения,<br>- решать уравнения содержащие переменную под знаком модуля;<br>- решать уравнения с параметром. |
| 5 | **Раздел 4.**<br>*Неравенства* | 4.1<br>Метод интервалов.<br>4.2.<br>Иррациональные неравенства. | 14 | *Учащиеся должны знать:*<br>-алгоритм решения неравенств методом интервалов;<br>- способы решения неравенств. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 4.3<br>Показательные и логарифмические неравенства.<br>4.4 Тригонометрические неравенства.<br>4.5<br>Неравенства с модулем.<br>4.6<br>Неравенства с параметром. | | *Учащиеся должны уметь:*<br>-решать неравенства с помощью метода интервалов;<br>- решать неравенства, содержащие знак модуля и параметры;<br>-применять выбранные методы к решениям иррациональных неравенств;<br>-решать показательные и логарифмические неравенства;<br>-решать тригонометрические неравенства,<br>-решать неравенства графическим способом. |
| 6 | **Раздел 5.**<br>*Решение геометриче-ских задач.* | 5.1<br>Задачи по планиметрии.<br>5. 2.<br>Задачи по стереометрии | 10 | *Учащиеся должны знать:*<br>-теоремы, опорные факты планиметрии и стереометрии;<br>- методы решения задач по планиметрии и стереометрии;<br>-решения задач методом координат и при помощи векторов; |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | *Учащиеся должны уметь:*<br>-распознавать и формулировать основные опорные факты планиметрии и стереометрии;<br>-решать задачи на вычисление площадей сечений;<br>- изображать стереометрические фигуры и их комбинации в соответствии с правилами параллельного проектирования;<br>- решать задачи по планиметрии и стереометрии;<br>- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы. |
| 7 | **Раздел 6**. *Задачи по теории вероятно-стей.* | 6.1<br>Комбинаторные задачи.<br>6.2.<br>Задачи с применением вероятностных правил. | 4 | *Учащиеся должны знать:*<br>-элементы комбинаторики и теории вероятностей:<br>-комбинаторное правило умножения и сложения,<br>-перестановки, размещения, сочетания, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | -понятие случайного события,<br>-вероятность случайного события.<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>-использовать формулы комбинаторики для вычисления вероятности;<br>-решать задачи указанной тематики. |
| 8 | *Обобщение и систематизация знаний, умений, навыков.* | Подготовка к итоговому тестирование<br><br>Итоговое тестирование<br><br>Работа над ошибками | 8 | *Учащиеся должны знать:*<br>- основные методы и приемы решения задач, уравнений и неравенств.<br>*Учащиеся должны уметь:*<br>- проводить анализ своих ошибок. |

## *Список использованной литературы*

1. Алгебра и начала математического анализа : 10-11 кл. : профильная программа для общеобразоват. организаций / сост. Коваленко Н.В., Федченко Л.Я., Маркина И.А.; ДИППО. – Донецк: Истоки, 2015. – 19 с
2. Алимов Ш.А. , Колягин Ю.М. и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровень». – М.: Просвещение, 2016
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 класс: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровень». – М.: Просвещение, 2016.
4. Базисный учебный план общеобразовательных организаций Донецкой Народной Республики.
5. Геометрия : 10-11 кл. : программа для общеобразоват. организаций: профильный уровень / сост. Коваленко Н.В., Федченко Л.Я., Маркина И.А.; ДИППО. – Донецк: Истоки, 2015. – 15 с.
6. Государственный образовательный стандарт основного и среднего общего образования на 2015-2017 гг.
7. “Единый государственный экзамен”. Контрольно – измерительные материалы 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015.
8. Сборник программ по математики для допрофильной подготовки и профильного обучения (в двух частях). Ч.II. Профильное обучение: Факультативы и курсы по выбору / Состав. Н.С.Прокопенко, О.П.Вашуленко, О.В. Ергина.—Х.: Изд-во «Ранок», 2011.—320с.

## *Список литературы для учителей и учащихся*

1. Алимов Ш.А. , Колягин Ю.М. и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического

анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровень». – М.: Просвещение, 2016

2. Апостолова Г.В., Ясинский В.В. Первые встречи с параметрами. - К: Факт, 2008.
3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 класс: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровень». – М.:Просвещение, 2016.
4. Вавилов В.В. и др. “Задачи по математике. Уравнения и неравенства”. Москва. “Наука”. 1987 г.
5. Горнштейн П.И. и др. “Задачи с параметрами”. Москва-Харьков. “Илекса”, “Гимназия”. 2003 г
6. “Единый государственный экзамен”. Контрольно – измерительные материалы 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015.
7. Нелин Е.П. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10 кл. общеобразоват. учеб. заведений: проф.уровень - Х.: Гимназия, 2010
8. Сканави М.И. «Сборник задач по математике для поступающих в вузы», М.: ООО«ОНИКС»: ООО «Изд-во «Мир и Образование», 2008.
9. Шарыгин И.Ф. «Факультативный курс по математике. Решение задач. 10-11 кл.». Москва. «Просвещение» 1990-1991 год.

## ***Интернет-ресурсы:***

1. www.fipi.ru, свободный доступ
2. www.ege.edu.ru, свободный доступ
3. http://www.mathege.ru Открытый банк заданий ЕГЭ по математике.
4. Allmath.ru — вся математика в одном месте
5. EqWorld: Мир математических уравнений
6. Exponenta.ru: образовательный математический сайт
7. http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/165.pdf 165 задач с параметрами и их решения

Приложение 1

## Технологическая карта

| Тема занятия | Форма проведения | Ведущая образовательная цель | Форма организации | Методы и приемы обучения | Новые понятия и методы |
|---|---|---|---|---|---|
| Рациональные уравнения и системы. | Фрагментарная лекция | Расширить и систематизировать знания учащихся о видах преобразований, о методах решения рациональных уравнений и систем; научить их делить многочлен на многочлен; использовать схему Горнера, теорему Безу | Фронтальная работа с учащимися | Объяснительно иллюстративный, практический методы | Методы: подбор корней, сведение уравнений к квадратным; решение нестандартных уравнений. Понятие: деление многочлена на многочлен |
| Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля | Фрагментарная лекция | Повторить определение и геометрический смысл модуля и методы решения уравнений, основанные на этих понятиях; ознакомить учащихся с методами: возведения обеих частей уравнения в квадрат; разбиения на промежутки; решения уравнений, содержащих «модуль в модуле» | Фронтальная работа в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, алгоритмический, практический методы | Методы: возведения обеих частей уравнения в квадрат; разбиения на промежутки; решения уравнений, содержащих «модуль в модуле» |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Решение иррациональ-ных уравнений и их систем | Фрагментарная лекция | Обобщить, расширить и систематизировать знания учащихся о методах решения иррациональных уравнений и их систем | Фронтальная работа в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, практический методы | Методы: сведения к системе алгебраических уравнений; решения через систему неравенств |
| Методы решения тригономе-трических уравнений | Фрагментарная лекция | Рассмотреть дополнительные тригонометрические формулы; расширить и систематизировать знания учащихся о методах решения тригонометрических уравнений, ознакомить учащихся с правилами отбора корней в уравнениях | Коллективная форма работы | Объяснительно-иллюстративный, алгоритмический, практический методы | Методы: «универсальных» подстановок; решения уравнений понижением степени; решения уравнений с помощью оценки его частей |
| Уравнения, содержащие обратные тригонометрии -ческие функции. Решение систем тригонометри-ческих уравнений | Фрагментарная лекция | Повторить понятия обратных тригонометрических функций, рассмотреть методы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, систем тригонометрических уравнений; ознакомить учащихся с записью ответа для систем уравнений | Коллективная форма работы с учащимися в сочетании с индивидуальной и групповой | Объяснительно-иллюстративный, практический, проблемно поисковый методы | Методы: введения новой переменной; нахождения значений тригонометрической функции от обеих частей уравнения; решения систем тригонометрических уравнений заменой неизвестных |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Методы решения показательных уравнений и их систем | Фрагментарная лекция | Повторить понятие и свойства показательных функций, расширить и систематизировать знания учащихся о методах решения показательных уравнений и их систем | Фронтальная форма работы с учащимися в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративные практические методы | Методы: группировки; решения нестандартных уравнений |
| Методы решения логарифмичес-ких уравнений и их систем | Фрагментарная лекция | Повторить свойства и определение логарифма; обобщить и систематизировать методы решения логарифмических уравнений и их систем; рассмотреть метод решения с помощью логарифмирования | Фронтальная форма работы с учащимися в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, практический методы | Методы: подстановки, логарифмирования |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Общие и специальные методы решения уравнений | Практикум | Выявление общих подходов к решению уравнений различных видов, для большей осознанности сути применения каждого из методов решения | Фронтальная и индивидуальная формы работ учащихся | Исследовательский практический методы;<br>Прием - учебная дискуссия | |
| Неравенства | Фрагментарная лекция | Повторить свойства показательной, логарифмической, тригонометрической функций; рассмотреть алгоритмы решения различных видов неравенств и применение этих алгоритмов при вы- полнении заданий | Фронтальная форма работы учащихся в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, алгоритмический, практический методы | Методы решения неравенств с модулем; рациональных неравенств высших степеней |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Задачи с параметром | Фрагментарная лекция | Рассмотреть алгоритм решения задач с параметром и его применение при решении различных типов заданий | Фронтальная форма работы в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, алгоритмический, практический методы | Методы решения уравнений и неравенств с параметром |
| Текстовые задачи. Прогрессии. | Семинар-практикум | Повторить и систематизировать знания приемов решения текстовых задач, решения заданий с арифметическими и геометрическими прогрессиями | Групповая и коллективная формы | Исследовательский практический методы | |
| Задачи по теории вероятностей | Фрагментарная лекция | Выявление общих подходов к решению задач по комбинаторике и теории вероятностей, для большей осознанности сути применения каждого из методов решения | Коллективная форма работы с учащимися в сочетании с индивидуальной | Объяснительно-иллюстративный, практический методы | Способы и приемы выбора формул правил для решений задач<br>Понятия: перестановки, размещения, сочетания с повторениями<br>Формула Бернулли |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Логические задачи | Фрагментарная лекция | Ввести понятия: логическая цепочка, решение логической цепочки, логическая задача; ознакомить учащихся с основными методами их решения | Коллективная, групповая и индивидуальная форма работы | Объяснительно-иллюстративный, алгоритмический, практический методы | Методы решения логических цепочек и логических задач (с помощью таблиц). Понятия: логическая цепочка; решение логической цепочки, логическая задача |
| Задачи по планиметрии | Семинар | Повторить, обобщить и систематизировать основные формулы и приемы решения задач планиметрии | Групповая и коллективная формы работы с учащимися | Исследовательский объяснительно-иллюстративный, практический методы; прием: введение элементов соревнования | |
| Задачи по стереометрии | Семинар | Повторить, обобщить и систематизировать основные формулы и приемы решения задач стереометрии. | Коллективная форма работы с учащимися | повторить, обобщить и систематизировать основные формулы и приемы решения задач стереометрии | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Подготовка к итоговому тестированию | Практикум | Закрепить практические умения и навыки применения различных методов и приемов решения | Фронтальная, групповая и индивидуальная формы работы с учащимися | Практический, проблемно – поисковый методы | |
| Итоговое тестирование | Практикум | Определить уровень усвоения школьниками материала данного факультативного курса, дать учащимся возможность оценить свою степень подготовки к сдаче ГИА и вступительных тестов | Индивидуальная работа учащихся | Метод самостоятельной работы, практические и поисковые методы обучения | |
| Работа над ошибками | Практикум | Рассмотреть задания, вызвавшие трудности у учащихся при выполнении итогового тестирования | Коллективная и индивидуальная формы работ | Исследовательские практические методы | |

Приложение 2

## Методические рекомендации к проведению занятий в форме фрагментарной лекции

На фрагментарной лекции происходит изучение нового материала, совершенствование знаний, умений и навыков, обобщение и систематизация. Отсюда она получила название – фрагментарная. Эффективность и результативность комбинированной лекции зависит от четкого определения ее целевых установок и от абсолютизирования ее структуры.

Выделяют следующие основные элементы фрагментарной лекции:

1- организация учащихся;

2- повторение и проверка знаний учащихся, выявление глубины понимания и степени прочности изученного на предыдущих занятиях и актуализация необходимых знаний и способов деятельности для последующей работы по изучению и осмыслению нового материала на текущем уроке;

3- введение учителем нового материала и организация работы учащихся по его осмыслению и усвоению;

4- первичное закрепление нового материала и организация работы по выработке у учащихся умений и навыков применения знаний на практике;

5- задание упражнений на дом;

6- подведение итога лекции с выставлением оценок (по желанию) за работу на занятии отдельным учащимся.

Перечисленные компоненты методической подструктуры комбинированной лекции в зависимости от характера учебной ситуации и педагогического мастерства учителя взаимодействуют между собой и зачастую переходят друг в друга, меняют свою последовательность в зависимости от организации познавательного процесса. Ее структура является гибкой и подвижной. Проведение фрагментарной лекции вынуждает учителя четко регламентировать время ее отдельных этапов.

Мы рекомендуем в такой форме проводить занятия по темам: «Рациональные уравнения и системы», «Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля», «Решение иррациональных уравнений и их систем», «Методы решения тригонометрических уравнений», «Методы решения показательных уравнений и их систем», «Методы решения логарифмических уравнений и систем», «Неравенства», «Задачи с параметром», «Решение логических задач» .

Апробация некоторых тем данного факультативного курса в школе позволила определить приемы и примерные временные рамки проведения каждого из этапов комбинированной лекции:

1. - организация учащихся. Посещение факультативных занятий - дело добровольное, кроме этого данный факультатив рассчитан на выпускников (людей достаточно взрослых), поэтому на этот этап мы решили отводить не более 2-ух минут.

2. - повторение и актуализация знаний. Продолжительность этого этапа 10 – 15 минут. На нем мы рекомендуем провести небольшую самостоятельную работу 1 – 2 задания по предыдущей теме и повторить с учениками основные понятия и формулы из новой темы. Этот этап мы оставляем для личного творчества учителя, отметив лишь, что на наш взгляд, обязательно нужно провести актуализацию знаний в форме самостоятельной письменной работы по теме «Методы решения тригонометрических уравнений», т.к. знание тригонометрических формул во многом обеспечивает успешность выполнения заданий по тригонометрии.

3. - введение нового материала. На этот этап отводится от 40 до 55 минут. Содержание по каждой теме, предложенное нами в приложении 1, не является обязательным. Учитель может сам определять содержание факультативного занятия с учетом специфики класса и школьного учебника, беря предложенное нами за основу. На наш взгляд, факультатив станет более эффективным, если ученики будут кратко записывать суть отдельных методов решения, а также предложенные алгоритмы решения. В процессе

объяснения новой темы мы предлагаем преподавателю не решать полностью задание, если его свели к решению уже известными методами, а предоставить это сделать учащимся. Это позволит в процессе изучения нового материала сразу проводить его первичное закрепление. Объяснение дальнейшего решения таких задач рекомендуем проводить в устной форме, так как это будет способствовать развитию математической речи у учащихся, а так же сокращению времени на выполнение задания.

4. - закрепление нового материала. Продолжительность этапа 15 – 25 минут. В конце каждой из предложенных тем необходимо предусмотреть упражнения на закрепление полученных знаний. Мы предлагаем проводить закрепление следующим образом: после изложения нового материала делается пяти минутный перерыв, на котором записываются задания; далее совместно устно разбирается план решения каждого из заданий, и выбираются задачи, которые будут решены на занятии (остальные задаются на дом). Выбранные задачи решаются самостоятельно или по группам, ответы сверяются. Если много человек не справилось с решением, то задание решается, либо у доски, либо его проговаривает один из справившихся учеников.

5. - подведение итогов обязательно для всех занятий. Оно заключается в кратком повторении (по возможности учащимися) содержания прошедшего занятия, выставлении оценок (по желанию). Его продолжительность зависит от оставшегося времени.

6. - домашние задание состоит из двух частей: первая – это дорешивание дома задач, записанных на доске, но не решенных; вторая – повторение основных положений по следующей рассматриваемой теме.

На первых занятиях данного факультативного курса мы рекомендуем не только сообщить учащимся цели проведения и содержание факультатива, но и кратко рассмотреть понятия и виды равносильных и неравносильных преобразований уравнений (можно просто раздать им листы - памятки, чтобы этот этап занял меньше времени) для использования их при решении уравнений.

Кроме этого мы советуем в начале каждого занятия, и после объяснения новой темы уделять несколько минут вопросам учащихся по материалу, вызвавшему у них затруднения во время решения заданий в классе или дома, при рассмотрении заданий из учебных пособий для поступающих. Такие консультации можно проводить как для всей факультативной группы, так и в индивидуальном порядке.

Приложение 3

## Методические рекомендации к проведению семинарских занятий.

Цель проведения занятий – семинаров в том, чтобы сделать теоретическое обобщение, отработать основные методы, способы и приемы решения математических задач, показать связь математики с жизнью.

Проведение семинарских занятий активизирует процесс обучения, учит учащихся выступать с самостоятельными сообщениями, формирует у них навыки исследовательских умений, а также повышает культуру общения и развитость речи.

Укажем основные случаи, когда предпочтительнее организовывать занятия в форме семинаров:

1) занятия по теме учитель проводит в форме лекций, уделяя особое внимание разъяснению главного, основного содержания материала. Вслед за ними проводится семинарское занятие (одно или несколько), на котором учащиеся самостоятельно, пользуясь литературой, изучают материал, выполняют упражнения, закрепляют полученные знания.

2) при проведении обобщающих занятий по некоторым темам.

3) при изучении новой темы, если материал доступен для самостоятельной переработки учащихся.

Эффективность семинарских занятий в значительной мере зависит от организации их подготовки. На подготовку к семинару необходимо выделять достаточное количество времени. Учащимся сообщается тема семинара, основные вопросы теории, которые будут рассматриваться на занятии, даются задачи, приемами решения которых, должен овладеть каждый. Распределяются индивидуальные и групповые задания на нахождение применения рассматриваемых вопросов на практике, на самостоятельное рассмотрение отдельных тем и др.

В процессе подготовки к семинару по рекомендации учителя школьники изучают дополнительную литературу, работают над заданным материалом.

Мы предлагаем на нашем факультативном курсе провести семинары – обобщение знаний. Здесь понятие «обобщение знаний» подразумевает повторение и систематизацию материала, включенного в задания вступительных тестов и рассматриваемого в школьном курсе математики в достаточном объеме. Материал с точки зрения содержания данного факультативного курса является новым.

Всего тематическое планирование факультативного курса «Подготовка к ГИА. Практикум по решению уравнений и неравенств» предусматривает проведение нескольких семинарских занятий по обобщению знаний.

**Семинар 1**

*Тема*: Текстовые задачи. Прогрессии.

*Тип:* семинар – обобщение знаний.

*Основная образовательная цель*: повторить и систематизировать знания приемов решения текстовых задач, решения заданий с арифметическими и геометрическими прогрессиями.

*Предварительная работа*: на предшествующем факультативном занятии (в его конце) происходит разбиение учеников на шесть групп, каждой из которых предлагают самостоятельно рассмотреть или основные приемы решения текстовых задач одного из видов ( задачи на движение, задачи на вычисление процентов, задачи на работу и задачи на смеси), или формулы и способы решения заданий с арифметическими и геометрическими прогрессиями. При подготовке ученикам рекомендуется пользоваться учебными пособиями и Интернет-ресурсами.

*Проведение*: В начале занятия каждая группа делает сообщения, остальные записывают основное. Далее преподаватель предлагает серию задач по рассмотренным темам, составленную из вариантов тестов для поступления. Мы рекомендуем больше внимания уделить задачам на вычисление процентов, т.к. такой тип заданий встречается во многих вариантах вступительного тестирования. Необязательно на занятии решать задачи полностью, достаточно, разобрав условия, составлять уравнения или составлять план решения, такие задачи ученики дорешают дома (тогда на следующем занятии, в самом его начале, сверяются ответы). Это позволит за занятие разобрать больше различных видов задач.

*Домашнее здание*: решение предложенных учителем задач, которые не успели рассмотреть на данном занятии; подготовка к следующему семинарскому занятию.

*Подведение итогов*: в конце семинара еще раз кратко повторяются основные положения рассмотренных тем, после чего ученикам выставляются две оценки (по желанию): общая для группы, при этом учитывается качество выступлений и количество выступающих и индивидуальная - за работу на уроке.

Занятия «Решение задач планиметрии» и «Решение задач стереометрии» мы предлагаем провести также в форме семинаров, основываясь на проведенный анализ заданий из вступительных тестов, который показал, что объема материала школьного курса геометрии достаточно для успешного их решения.

**Семинар 2**

*Тема*: Решение задач планиметрии.

*Тип занятия*: семинар – обобщение знаний. Основная образовательная цель: повторить, обобщить и систематизировать основные формулы и приемы решения задач планиметрии.

*Предварительная работа*: на дом дается задание выписать формулы планиметрии, распределив их по группам для основных геометрических фигур. Трем ученикам (по желанию) дается задание подготовить сообщения (10 минут) по темам: «Решение задач с помощью выявления характерных особенностей заданной конфигурации», «Геометрические методы решения задач», «Аналитические методы решения задач», взяв за основу материал из учебных пособий Шарыгина И.Ф. За неделю до проведения занятия просмотреть у них содержание выступлений.

*Проведение*: в начале занятия повторяются основные формулы по планиметрии. Происходит это в виде игры: разделившись на несколько групп, учащиеся по очереди читают выписанные ими формулы по определенной теме, побеждает группа, последняя назвавшая формулу, повторять формулы нельзя. При этом остальные пополняют записи недостающими формулами. Далее делаются сообщения, можно предложить ученикам отразить у себя в тетрадях суть выступлений. Все оставшееся время занятия отводится на решение задач планиметрии, ведущие методы решения которых - алгебраические, т.к. подобные задания характерны для тестов. Задачи можно не решать полностью, а разобрав вместе условия задач и нарисовав рисунок к ним, составлять планы решения, по которым ученики самостоятельно дорешают дома (в начале следующего занятия обязательно нужно сверить результаты).

*Домашнее задание*: подготовка к следующему семинару.

*Подведение итогов*: в конце еще раз обсуждаются стандартные приемы решения задач планиметрии. За работу на занятии выставляются оценки (по желанию).

**Семинар 3**

*Тема*: Решение задач стереометрии.

*Тип занятия*: семинар – обобщение знаний.

*Основная образовательная цель*: повторить, обобщить и систематизировать основные формулы и приемы решения задач стереометрии.

*Предварительная работа*: на подведении итогов семинарского занятия «Решение задач по планиметрии» учитель сообщает, что для задач стереометрии остаются прежними ведущие принципы решения задач планиметрии, и предлагает учащимся самостоятельно их рассмотреть и выписать основные формулы стереометрии, повторить основные свойства фигур. К занятию подготавливаются модели различных пространственных тел, рассматриваемых в условиях задач, и карточки с названиями основных изучаемых пространственных тел (если получится – по числу посещающих факультатив).

*Проведение*: в начале занятия повторяются основные понятия, свойства, отношения пространственных тел, при этом могут использоваться их модели. Проводится это следующим образом: один из учеников, взяв на выбор карточку с названием фигуры, перечисляет основные понятия, параметры, свойства и формулы, связанные с этим телом; остальные помогают и т.д. Оставшееся время посвящено решению, при этом сначала решаются по одному заданию на каждый прием решения задач стереометрии, с обсуждением сути каждого, а потом (до конца занятия) рассматривается решение задач алгебраическими методами. Эти задачи можно не решать полностью, а разобрав вместе условия задач и нарисовав рисунок к ним, составлять планы решения, по которым ученики самостоятельно дорешают дома (в начале следующего занятия обязательно нужно сверить результаты).

*Подведение итогов*: обобщаются приемы решения задач планиметрии и стереометрии, еще раз повторяется суть их применения. Выставляются оценки (по желанию) за работу на занятии. На дом ученикам предлагается выполнить самостоятельную работу, состоящую из задач по планиметрии и стереометрии (задания могут быть общими для всех, по вариантам или индивидуальные).

Приложение 4

## Методические рекомендации к проведению занятий в форме практикумов

Практикум – один из видов лабораторно-практических работ в старших классах. Практикумы проводят при завершении крупного раздела, курса и их цель: обобщение о повторение способов действий. На занятиях данного типа происходит осмысление, воспроизведение и применение знаний с целью их углубления. Школьники учатся владеть приемами применения теории при выполнении упражнений и решении задач практического содержания.
Характерным для занятий-практикумов является усиление роли самостоятельной работы учащихся.

Проведение практикумов требует от учителя большой подготовительной работы по анализу теоретического и задачного материала темы, по определению целей занятия и способов контроля, по разграничению этапов занятия и выделению его структуры.

В форме практикумов мы предлагаем провести следующие занятия: «Общие и специальные методы решения уравнений», «Подготовка к итоговому тестированию», «Итоговое тестирование», «Работа над ошибками».

**Практикум 1**

*Тема:* Общие и специальные методы решения уравнений.

*Основная образовательная цель*: выявление общих подходов к решению уравнений различных видов, для большей осознанности сути применения каждого из методов решения.

*Проведение*: занятие состоит из трех частей: первая посвящена совместному анализу (учителя и учеников) изученного материла на выявление общих методов решения уравнений; вторая - решению уравнений разных типов, при этом задания составлены так, что уравнения решающиеся общим методом располагаются подряд (таких групп уравнений получается четыре, по числу методов: метод группировки, метод подстановки, метод сведения к алгебраическим уравнениям или неравенствам (или к их системам), метод оценки их левой и правой частей (анализ ОДЗ) ) для выявления общих приемов решения любого типа уравнений; в конце занятия – небольшая самостоятельная работа по решению уравнений.

*Подведение итогов*: по окончанию занятия делается вывод об общей сути применения методов решения уравнений разных типов и об их схожести. За занятие каждый ученик может по желанию, получить оценку, учитывающую его работу в классе и выполнение самостоятельной работы.

**Практикум 2**

*Тема*: Подготовка к итоговому тестированию.

*Основная образовательная цель*: закрепить практические умения и навыки применения различных методов и приемов решения.

*Проведение*: занятие полностью посвящено выполнению разных заданий, часть из которых может выполняться у доски, часть – на местах (индивидуально или по группам). Для рассмотрения большего объема материала учителю можно заранее сделать на каждую парту ксерокопию упражнений или воспользоваться мультимедийным проектором, это позволит сэкономить время и увеличить число работающих у доски, т. к. у преподавателя отпадет необходимость читать и записывать на доску условия заданий. Данные ксерокопии можно будет потом использовать на следующий год при проведении подобного факультативного курса. Кроме этого часть заданий можно не решать, обсудив план их решения.

*Подведение итогов*: в конце занятия недорешенные в классе примеры задаются на дом, и сообщается, что на следующем занятии будет проведена итоговая работа по данному факультативному курсу.

Приложение 5

**Методические рекомендации к проведению итогового тестирования**

Ведущая цель проведения занятия: определить степень подготовки учащихся к сдаче ГИА, ЕГЭ.

Данное тестирование включает следующие этапы проведения: *организация учащихся* (так как факультативные занятия посещает обычно не большое количество человек, то их можно рассадить по одному за парту, и ограничится одним вариантом итогового тестирования);

*постановка цели данного тестирования* (здесь необходимо отметить, что данное тестирование проводится в большей степени для самих учеников, позволяя им определить свою степень готовности к сдаче выпускных и вступительных экзаменов, это увеличит достоверность полученных результатов);

*инструктаж* (мы рекомендуем учителю сделать копию теста для каждого ученика, правильные варианты ответов пусть учащиеся записывают на отдельном бланке ответов, это позволит пользоваться данными тестами неоднократно);

*выполнение учениками работы* (желательно, чтобы ученики по окончанию занятия сдали не только листочки с ответами, но и решения заданий, это позволит преподавателю выявить причины допущенных ошибок и учесть их при проведении подобного факультатива в последующих одиннадцатых классах);

*сверка результатов* (после того, как работы будут сданы, ученикам даются правильные варианты ответов, заранее подготовленные учителем, для самостоятельной предварительной оценки);

*подведение итогов* (на наш взгляд, удачнее будет выбрать ту систему оценки, которая будет предложена на ГИА, уже в конце занятия можно сделать предварительные выводы об успешности выполнения данного теста).

Результаты итогового тестирования можно довести до сведения родителей на родительском собрании, если на это дадут согласие ученики.

Последнее занятие на факультативе также рекомендуется провести в форме практикума. Это занятие посвящено работе над ошибками. Здесь необходимо рассмотреть те задания, в которых большинство ребят допустили ошибки при выполнении итогового тестирования. Часть времени можно посвятить консультациям индивидуальным вопросам учащихся.

Приложение 6

**Итоговое тестирование**

Отметьте номер правильного ответа в бланке ответов

| № | ЗАДАНИЯ | Варианты ответов |
|---|---|---|
| 1 | Если 20% числа равны $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})+2\sqrt{6}$ , то это число равно | 1) 15 2) 20 3) 25 4) 30 5) 35 |
| 2 | Результат упрощения выражения, $\frac{(\sqrt{а}-\sqrt{в})(а-в)}{(а+в-2\sqrt{ав})(\sqrt{а}+\sqrt{в})}$ имеет вид | 1) 1 2) $\sqrt{a}+\sqrt{в}$ 3) *(а - в)* 4) $\sqrt{a}-\sqrt{в}$ 5) 2а |
| 3 | Количество целых значений параметра $a$, при которых абсцисса и ордината вершины параболы у =$(х-2а)^2-а^2-8а-15$ положительны, равно | 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4 |
| 4 | Сумма корней уравнения $\sqrt{х-1{,}5}\,(2^х+8\cdot2^{-х}-6)=0$ равна | 1) 4,5 2) 2,5 3) 4 4) 3,5 5) 2 |
| 5 | Результат вычисления выражения $tg(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{П}{2})$ равен | 1) $2\sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 3) -$2\sqrt{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 5) 2,828 |
| 6 | Двое рабочих выполнили заказ, причем второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 часа после начала работы им оставалось выполнить 45% заказа. По окончанию работы оказалось, что каждый выполнил ровно половину заказа. За сколько часов каждый рабочий может выполнить весь заказ? | 1)12 и 10 ч 2)10 и 8 ч. 3)8 и 6 ч. 4)10,5 и 9ч. |
| 7 | Если в треугольнике АВС заданы АВ=2, ВС=3, СА=4, то синус угла С равен | 1)$\frac{\sqrt{13}}{8}$ 2) $\frac{\sqrt{15}}{8}$) 3) $\frac{\sqrt{14}}{8}$ 4) $\frac{\sqrt{19}}{8}$ |
| 8 | Если сфера касается всех граней правильной треугольной призмы, а ребро основания призмы равно 1, то радиус сферы равен | 1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$) 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ |
| 9 | Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 91, если третий член равен 9, а седьмой на 20 больше второго. | 1)6 2) 7 3) 9 4)11 5) 10 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | Указать наибольшее натуральное значение из области определения функции: y=$\log_5(\frac{1}{x} - x)$. | 1) 5 2) 3) 7<br>4) 8 5) 0 |
| 11 | Найдите недостающие в ряду число:<br>12 14 28 * 60 62. | 1) 26 2) 58 3) 30<br>4) 38 5) 50 |
| 12 | Найти произведение корней уравнения<br>$(\frac{10x+1}{10})^{lg(x+0,1)+2}$=1000 | 1) 1 2) -0.9801<br>3) 0.9801 4) 0.99 |
| 13 | Найдите корни уравнения<br>cos4x+2$\cos^2$x=0. | 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{3} \pm \pi n.$2)$\frac{\pi}{4} \pm \pi k.$<br>3) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi k.$ |
| 14 | Найти сумму корней уравнения<br>\|x+1\|=2\|x-2\|. | 1) 5 2) 6 3) 4<br>4) 8 5) 3 |
| 15 | Наименьшее натуральное решение неравенства \|cosx\|$< \frac{\sqrt{3}}{2}$. | 1) 1 2) 2 3) 3<br>4) 4 5) 5 |

**Правильные ответы к итоговому тестированию**

| НОМЕРА ЗАДАНИЙ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |

Приложение 7

# Подбор текстовых задач для подготовки к ГИА и ЕГЭ

## Задачи «на движение»

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 363 км, навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 57 км/ч и 64 км/ч? *Ответ*: 3ч.
2. Города *A, B* и *C* соединены прямолинейным шоссе, причем город *B* расположен между городами *A* и *C.* Из города *A* в сторону города *C* выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города *B* в сторону города *C* выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 23 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами *A* и *B* равно 92 км? *Ответ*: 4ч.
3. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал с скоростью 52 км/ч, а вторую половину времени - со скоростью 62 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. *Ответ*: 57 км/ч.
4. Расстояние от *A* до *B* первый автомобиль проезжает в $1\frac{2}{7}$ раза быстрее второго автомобиля. Найдите скорости автомобилей, если известно, что скорость первого на 18 км/ч больше скорости второго. *Ответ*: скорость первого 81 км/ч, скорость второго 63 км/ч.
5. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идет со скоростью 2,7 км/ч, а другой - со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча? *Ответ*: 3 км.
6. Моторная лодка прошла против течения 21 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против те-

чения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. *Ответ*: 16 км/ч.

7. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 10 часов после отплытия из него. *Ответ*: 60 км.

8. Из пункта *A* круговой трассы, длина которой равна 80 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 92 км/ч, скорость второго автомобилиста равна 68 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг? *Ответ:* 200 мин.

9. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 с. Найдите длину поезда. *Ответ*: 900м.

10. Из пункта *A* в пункт *B,* отстоящий от пункта *A* на 11 км, отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 15 минут после этого навстречу ему из *B* вышел другой пешеход со скоростью 6 км/ч. Найдите расстояние от пункта *B* до места их встречи. *Ответ*: 6 км.

11. Из пункта *A* в пункт *B* по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{9}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка шла с включенным мотором, ее скорость была на 7 км/ч больше скорости байдарки. Найдите скорость байдарки в неподвижной воде, если в пункт *B* байдарка и моторная лодка прибыли одновременно. *Ответ:* 9 км/ч.

12. Велосипедист отправился с некоторой скоростью из города *A* в город *B,* расстояние между которыми равно 88 км. Возвращаясь из *B* в *A,* он ехал поначалу с той же скоростью, но через 2 ч пути вынужден был сделать

остановку на 10 мин. После этого он продолжил путь в *А,* увеличив скорость на 2 км/ч, и В результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *А* в *В.* Найдите скорость велосипедиста на пути из *А* в *В. Ответ*: 22 км/ч.

13. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 0,4 мин. Найдите длину поезда. *Ответ*: 200 м.

14. Ходики показывают 4 часа. Какое время будут показывать ходики, когда минутная стрелка догонит часовую стрелку в восьмой раз? *Ответ*: 12.00.

**Задачи «на работу»**

1. Для наполнения плавательного бассейна водой имеются три насоса. Первому насосу для наполнения бассейна требуется времени вдвое меньше, чем второму, и на 7 часов больше, чем третьему. Три насоса, работая вместе, наполнили бы бассейн за 4 часа, но по условиям эксплуатации одновременно должны работать только два насоса. Определите минимальное время (в минутах) наполнения бассейна. (Производительность каждого насоса постоянна в течение всей работы). *Ответ*: 280 мин.

2. Два маляра, работая вместе, могут за 1 час покрасить стену площадью 40 $м^2$. Первый маляр, работая отдельно, может покрасить 50 $м^2$ стены на 4 часа быстрее, чем второй покрасит 90 $м^2$ такой же стены. За сколько часов первый маляр сможет покрасить 100 $м^2$ стены? *Ответ*: 4 час.

3. Бак заполняется керосином за 2ч 30 м с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3:5:8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 ч 18 м совместной работы 2 и 3 насосов? *Ответ*: 42,25%.

4. Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 часов. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3:4.

Плотники договорились работать поочередно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч? *Ответ*: 0,7.

5. Три насоса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за 5 часов. Производительности насосов относятся как 4:3:1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов? *Ответ*: 80%.

6. Один мастер может выполнить заказ за 28 ч, а другой - за 21 ч. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе? *Ответ:*12ч.

7. Первая труба наполняет бак объемом 790 литров, а вторая труба - бак объемом 750 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает каждая труба, если баки были наполнены за одно и то же время? *Ответ*: 75л, 79л.

8. Сергей отвечает за час на 10 вопросов теста, а Иван - на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Сергей закончил позже Ивана на 30 минут. Сколько вопросов содержит тест? *Ответ*: 30.

9. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ? *Ответ*: 5.

10. Прозаик хочет набрать на компьютере рукопись объемом 450 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать прозаик? *Ответ*: 25 страниц.

11. В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 л воды за 4 мин, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 7 мин. Сколько времени эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 99 л воды? *Ответ*: 28 мин.

12. Даша и Вита пропалывают грядку за 12 минут, а одна Вита - за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша? *Ответ*: 30 мин.

13. Карлсон съедает банку варенья за 10 минут, Фрекен Бок - за 12 минут, а Малыш - за 15 минут. За сколько минут они съедят банку варенья втроем? *Ответ*: 4 мин.

14. Маша и Настя могут вымыть окно за 20 минут. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 минут, а Маша и Лена - за 12 минут. За какое время девочки вымоют окно, работая втроем? *Ответ*: 10 мин.

15. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй - 13 рабочих. Через 8 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе? *Ответ*: 6 дней.

**Задачи «на банковские проценты», части, доли.**

1. Стоимость товара снизили на 10%, затем новую цену понизили на 20%, а после перерасчета снизили еще на 10%. На сколько процентов снизили первоначальную цену товара (ответ округлите до целых). *Ответ*: 35%.

2. Зарплату повысили на р %. Затем новую зарплату повысили на 2р%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз? *Ответ*: 20%

3. В январе пакет акций стоил на 10% меньше, чем в феврале. В феврале этот же пакет акций стоит на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов меньше стоимость пакета акций в январе, чем в марте? *Ответ*: 28% .

4. Набор химических реактивов состоит из трех веществ, массы относятся, как 3:7:10. Массу первого вещества увеличили на 8%, а второго –

на 4%. На сколько процентов нужно уменьшить массу третьего вещества, чтобы масса всего набора не изменилась? *Ответ*: 5,2%.

5. Стоимость покупки С учетом трехпроцентной скидки по дисконтной карте составила 1940 рублей. Сколько бы пришлось заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты? *Ответ*: 2000 р.

6. До снижения цен товар стоил 300 рублей, а после снижения цен стал стоить 273 рубля. На сколько процентов была снижена цена товара? *Ответ*: на 9 %.

7. Стоимость акций снизилась на 84%. Во сколько раз подешевели акции? *Ответ*: в 6,25 раза.

8. Производство некоторого товара увеличилось в 96 раз. На сколько процентов выросло производство? *Ответ:* на 9500%.

9. Себестоимость изделия снизилась в 8 раз. На сколько процентов снизилась себестоимость? *Ответ*: на 87,5%.

10. В марте на фабрике изготовили 500 ковров. В апреле производство выросло на 20%, а в мае – еще на 20%. Сколько ковров изготовили на фабрике в мае? *Ответ*: 720.

11. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 60%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата жены? *Ответ*: на 40%.

12. В городском квартале проживало 5000 человек. Через год в результате строительства новых домов число жителей выросло на 20%, а еще через год на 30%. Сколько человек стало проживать в квартале? *Ответ*: 7800.

13. Банковский вклад в мае увеличился на 10%, а в июне уменьшился на 10%, после чего на счету оказалось 10890 рублей. Найдите сумму вклада на конец апреля. *Ответ*: 11000 р.

14. Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. Если бы зарплата матери увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 30%. Если бы

стипендия сына увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 6%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата отца? *Ответ*: 67%.

15. Митя, Антон, Гоша и Борис купили лотерейный билет за 20 рублей. Митя заплатил 24% стоимости билета, Антон - 3 рубля 70 копеек, Гоша - 0,21 стоимости билета, а оставшуюся сумму внес Борис. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесенному вкладу. На билет выпал выигрыш 1000 рублей. Какая сумма причитается Борису? *Ответ*: 365 р.

**Задачи «на смеси и сплавы»**

1. Морская вода содержит 5% (по весу) соли. Сколько килограмм пресной воды необходимо добавить к 20 кг морской воды, чтобы содержание соли в ней составило 2%. *Ответ*: 30 кг.
2. Свежие грибы содержат 92% воды, а сухие 8%. Сколько получится сухих грибов из 23 кг свежих. *Ответ*: 2кг.
3. К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе? *Ответ*: 32%.
4. Сколько литров пресной воды нужно добавить к 80 л морской, чтобы содержание соли в ней было не 5%, а 2%? *Ответ*: 120л.
5. Сплав алюминия и магния отличаются большой прочностью и пластичностью. Первый такой сплав содержит 5% магния, а второй сплав – 3% магния. Масса второго сплава в 4 раза больше, чем масса первого сплава. Эти сплавы сплавили и получили 3 кг нового сплава. Определите, сколько граммов магния содержится в новом сплаве. *Ответ*: 102 кг.
6. Смешали семь литров 16%-го раствора некоторого вещества с тремя литрами 6%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора. *Ответ:* 13%.

7. Смешали восемь литров 9%-го раствора некоторого вещества с двумя литрами 4%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора. *Ответ*: 8%.

8. Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ *A* и *B*. В первой смеси отношение масс веществ *A* и *B* равно 5: 1, а во второй смеси - 9: 2. Сколько килограммов вещества *B* содержится в первой смеси, если её масса составляет 102 кг? Сколько килограммов веществ *A* и *B* содержится в смеси, приготовленной из 102 кг первой смеси и 176 кг второй смеси? *Ответ:* масса В в 1-й смеси: 17кг, масса А в 3-й смеси:229 кг, масса В в 3-й смеси: 49 кг.

9. Имеется две смеси, каждая из которых состоит из веществ *A* и *B*. В первой смеси отношение масс веществ *A* и *B* равно 2: 5, а во второй смеси - 1: 3. Сколько килограммов вещества *B* содержится в первой смеси, если её масса составляет 147 кг? Сколько килограммов веществ *A* и *B* содержится в смеси, приготовленной из 147 кг первой смеси и 64 кг второй смеси? *Ответ*: масса В в 1-й смеси: 105кг, масса А в 3-й смеси:58 кг, масса В в 3-й смеси: 153 кг.

10. Имеются два сосуда, содержащие 10 кг и 12 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 39% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом растворе? *Ответ:* 7,2 кг, 0,72 кг.

11. Свежий виноград содержит 80% влаги, а сушёный виноград (изюм)- 5%. Сколько требуется свежего винограда для приготовления 1 кг изюма? *Ответ*: 4,75 кг.

12. В сосуд, содержащий 11 литров 17%-го водного раствора некоторого вещества, добавили шесть литров воды. Найдите концентрацию получившегося раствора. *Ответ:* 11%.

13. Смешали некоторое количество 11%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора. *Ответ:* 15%.

14. Смешали некоторое количество 14%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 18%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившегося раствора. *Ответ*: 16%.

15. В первой кастрюле был один литр кофе, а во второй кастрюле - один литр молока. Из второй кастрюли в первую перелили 0,13 л молока и хорошо размешали. После этого из первой кастрюли во вторую перелили 0,13 л смеси. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке? *Ответ*: поровну.

**Задачи на свойства целых чисел.**

1. Можно ли 295 тюльпанов подарить 37 дамам так, чтобы у каждой дамы оказалось одно и то же число тюльпанов? *Ответ:* нет.

2. Масса одной стиральной машины равна 18 кг. Может ли общая масса всех таких стиральных машин, находящихся на складе быть равной 384 кг? *Ответ:* нет.

3. Есть 800 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно добавить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 73 теннисистами? *Ответ*: 3.

4. Баночка йогурта стоит 7 рублей 16 копеек. Какое наибольшее число таких баночек можно купить на 50 рублей? *Ответ*: 6.

5. В одном контейнере можно разместить 9 одинаковых коробок. Какое наименьшее число контейнеров потребуется для того, чтобы разместить 97 таких коробок? *Ответ*: 11.

6. Теплоход рассчитан на 800 пассажиров и 65 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды? *Ответ:* 18.

7. На свой день рождения Маша купила 15 конфет и 9 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Маша может пригласить к себе, чтобы и конфеты и медали можно было разделить поровну между всеми, включая ее саму? *Ответ*: 2.

8. Найдите стоимость одного карандаша, если известно, что среди трех следующих утверждений есть верное: 1) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 25 копеек; 2) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 26 копеек; 3) за три таких карандаша заплатили 7 рублей 27 копеек. *Ответ*: 2 р. 42 к.

9. Если сложить возраст отца и возраст сына, то получится 52. Через 8 лет отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Сколько лет отцу и сколько сыну в настоящий момент? *Ответ:* отцу 43 года, сыну 9 лет.

10. На складе есть коробки с гречкой и коробки с рисом. Масса коробки с гречкой равна 4 кг, а масса коробки с рисом равна 8 кг. Может ли общая масса всех коробок, находящихся на складе, быть равной 2006 кг?
*Ответ*: не может.

11. Длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) выражаются целыми числами. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 38 см$^2$, а периметр больше 50 сантиметров. *Ответ:* 1 см и 38 см..

12. Можно ли 345 л молока разлить по двухлитровым, четырехлитровым и восьмилитровым бидонам так, чтобы в бидонах не оставалось пустого места?
*Ответ:* нельзя.

13. Нина задумала четырёхзначное число, сумма цифр которого равна 14. Известно, что это число не изменится, если записать его теми же цифрами, но в обратном порядке, и что число, образованное первыми двумя его цифрами, на 27 больше числа, образованного двумя последними его цифрами. Какое число задумала Нина? *Ответ*: 5225.

14. Число сторон выпуклого многоугольника в 7 раз меньше числа его диагоналей. Сколько сторон у многоугольника? *Ответ*: 16 сторон.

15. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится

на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, ее уменьшить число строк и число букв в строке на 4?

*Ответ:* на 228 букв.

**Текстовые задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии**

1. Сумма второго, третьего и четвертого членов убывающей арифметической прогрессии в три раза больше квадрата разности этой прогрессии. Сумма третьего и шестого ее членов равна двум. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии. *Ответ:*18

2. В арифметической прогрессии член девятый член в три раза больше третьего члена, а при делении седьмого члена на третий член получается частное 2 и остаток 1. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии. *Ответ*: 55

3. При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 метра, а в каждую следующую секунду на 9,8 метра больше, чем в предыдущую. Сколько времени будет падать тело с высоты 4410 м? *Ответ*: 30 сек

4. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4.Найти четвертый член прогрессии, если известно, что ее знаменатель положительный. *Отве*т: 0,5

5. Определить три положительных числа, которые образуют геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а сумма обратных величин равна 7/12.*Ответ*: 3,6,12

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма первых шести членов равна -84. Найти третий член прогрессии. *Ответ:* 16

7. Три числа $x, y, z$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $x, 2y, 3z$ образуют в указанном порядке

арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии, отличный от единицы. *Ответ:*1/3

8. Найти арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый член прогрессии, кроме того, образуют геометрическую прогрессию. *Ответ:* первый член 3 или 30

9. Найти четыре положительных числа, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три - геометрическую прогрессию. Сумма первых трех чисел равна 12, а сумма последних трех равна 19.*Ответ:* 2,4, 6,9

10. Первый член арифметической прогрессии в 2 раза больше первого члена геометрической прогрессии, и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50 % от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.*Ответ:* 50

11. Бригада маляров красит забор длиной 630 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 140 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор. *Ответ*: 9.

Приложение 8

## СОДЕРЖАНИЕ ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТИЯ, ПРОВОДИМОГО В ФОРМЕ ФРАГМЕНТАРНОЙ ЛЕКЦИЙ

Последнее время во вступительных тестах стали появляться задания, выполнение которых требует последовательных рассуждений, аргументированных выводов, умений анализировать, сопоставлять информацию, строить заключения из имеющихся посылок.

Рассмотрим два основных вида таких заданий: логические цепочки и логические задачи.

### *Решение логических цепочек*

Логические цепочки – это цепочки из цифр (букв, фигур и т.д.), между звеньями которой существует какая-то связь, зависимость. Под решением логической цепочки понимают нахождение пропущенного звена (символа) или ее продление. Для этого между «звеньями» цепочки находится логическая связь. Если цепочка состоит из чисел, то зависимость находится следующим образом:

1- «звенья» предложенной цепочки раскладываются на простые множители, ищется зависимость, делается предположение;

2- находится разность (сумма) между соседними «звеньями» цепочки, ищется зависимость, делается предположение (если зависимость не обнаруживается, то ищется логическая связь между членами цепочки, расположенных через одно звено и т.д.);

3- если предположения о зависимостях между «звеньями» охватывают всю цепочку, то на основе одного из них находим нужное число;

4- проверяем, подходит ли оно по остальным предположениям;

5- если «нет» – проверяем верность сделанных предположений, проделываем всю работу снова, если «да» – записываем ответ.

ПРИМЕР: Вставьте в ряд недостающее число:

11 8 16 13 * 23

*Решение.* Разложим на множители «звенья»:

11=11; 8=2·2·2; 16=2·2·2·2; 13=13 … 23=23.

Единственную связь, которую можно обнаружить – это третье «звено» равно удвоенному второму.

Можно сделать предположение 1: четное звено меньше последующего в два раза.

Найдем разность между соседними «звеньями»:

11-8=3; 8-16=8; 16-13=3, два раза она равна трем.

Предположение 2: нечетное «звено» больше последующего на три.

Предположения 1 и 2 охватывают всю цепочку (показывают зависимость между четными и нечетными «звеньями»), следовательно, их достаточно для решения.

Основываясь на предположении 1, получаем, что недостающее число равно 26.

Проверка показывает, что оно удовлетворяет предположению 2 и, следовательно, является верным.

*Ответ*: получилась цепочка 11 8 16 13 26 23.

Иногда при решении логических цепочек достаточно сделать одно предположение.

ПРИМЕР. Вставьте в ряд недостающее число:

5 10 30 * 600

*Решение.* Разложим звенья на простые множители:

1. 5=5; 2. 10=2·5; 3. 30=2·3·5; 4. ; 5. 600=23·4·5·5.

Получили, что каждое следующее «звено» цепочки получено произведением предыдущего числа на порядковый номер данного звена – это наше предположение. Оно охватывает все «звенья» цепочки, поэтому его одного достаточно для решения.

Недостающее число равно 30·4=120.

*Ответ*: 5 10 30 120 600.

## *Решение логических задач*

Логические задачи – это задачи, решение которых не требует больших математических вычислений, его находят путем рассуждений, анализа условий задачи.

При решении логических задач часто используют такие методы как перебор, доказательство от противного, решение задач с помощью таблиц и др. Мы рассмотрим метод решения логических задач с помощью таблиц, т.к. все логические задачи, встретившиеся нам среди заданий вступительных тестов, можно решить этим методом.

Суть метода: составляется таблица, куда записываются основные условия задачи.

Предварительно в задачах желательно для удобства проверки обозначить каждое условие. Проиллюстрируем это на примере.

ПРИМЕР. Коля, Боря, Толя, Юра заняли первые четыре места в соревнованиях по плаванию, причем никакие два мальчика не делили между собой места. На вопрос, какие места они заняли, трое ответили:

- Коля занял ни первое, ни последнее место;
- Боря – второе;
- Витя не был последним.

Какое место занял Витя?

*Решение*. В задаче идет речь о двух важных признаках: именах и местах, – которые надо сопоставить между собой.

Представим данные в виде таблицы (см. рис 1)

| имена | место | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Коля | | | | |
| Боря | | | | |
| Витя | | | | |
| Юра | | | | |

Рис. 1

По первому условию, Коля не занял первое и четвертое места, следовательно, в этих клетках ставим минусы с коэффициентом единица (см.рис.2).

По второму условию, Боря занял второе место, поэтому в строке «Боря» во всех остальных клетках можно поставить минусы с коэффициентом «2», т.к. Боря не мог занять еще какое-нибудь место. Аналогично можно поставить «-2» во всех остальных клетках второго столбца, т.к. второе место больше не мог занять никто (см. рис.2).

В третьем условии сказано, что Витя не занял четвертого места, поэтому в соответствующей клетке поставим минус с коэффициентом три (см. рис.2).

| имена | место | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Коля | -1 | -2 | | -1 |
| Боря | -2 | +2 | -2 | -2 |
| Витя | | -2 | | -3 |
| Юра | | -2 | | |

Рис. 2

В полученной таблице 2 в четвертом столбце везде стоят минусы, кроме одной клетки. Значит, четвертое место мог занять только Юра. В строке «Коля» стоят три минуса, следовательно, Коля мог занять только третье место. Тогда Витя занял первое место.

*Ответ*: Витя занял первое место.

Коэффициенты ставятся для того, чтобы легче было проверять правильность составления таблицы. Иногда для заполнения таблицы ее условия проверяются несколько раз, в этих случаях можно ставить двузначные коэффициенты (первая цифра – условие, вторая, – какой раз проверяется это условие)

*Упражнения:*

1. В этом году на нашей улице построили пять домов: №10, 11, 12, 13, 14. Один из них пятиэтажный, другой- шестиэтажный, третий – семиэтажный, четвертый –восьмиэтажный, пятый – девятиэтажный. Известно, что в доме №14 этажей больше, чем в доме №10; в доме №11 больше, чем в доме №13, и меньше, чем в доме №10; в доме №14 этажей меньше, чем в доме №12. Сколько этажей в доме №10. *Ответ*: 7

2. Удлините цепочку на два «звена»:

174 117 57 54 18 15 … … . *Ответ:* 5 2.

3. Три ученицы – Тополева, Березкина и Осинина на пришкольном участке посадили три дерева: тополь, березу и осину. Ни одна из девочек не посадила дерево той породы, от которой происходила их фамилия. Какое дерево посадила Тополева, если Березкина посадила тополь. *Ответ:* осина.

4. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет Гале, если: одна девочка ходит в детский сад; Аня старше Бори; сумма лет Ани и Веры делится на три. *Ответ:* Гале 15 лет.

5. Вставьте в ряд недостающее число

1 * 2 6 24 120 *Ответ:* 1.

6. Найдите недостающие в цепочке числа

6 8 10 11 14 14 * * 22 *Ответ:* 18 17.

## *Задача Эйнштейна*

А. Эйнштейн придумал эту задачу в прошлом веке и полагал, что 98% жителей Земли не в состоянии ее решить. Принадлежите ли вы к 2% самых умных людей планеты?

1. Есть 5 домов каждый разного цвета.

2. В каждом доме живет по одному человеку отличной друг от друга национальности.

3. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит определенное животное.

4. Никто из 5 человек не пьет одинаковые с другими напитки, не курит

одинаковые сигареты и не держит одинаковое животное.

Вопрос.  Кому принадлежит рыба?

Подсказки:

Англичанин живет в красном доме.

Швед держит собаку.

Датчанин пьет чай.

Зеленый дом стоит слева от белого (считайте, что эти дома стоят рядом - иначе в задаче получаются два решения).

Жилец зеленого дома пьет кофе.

Человек, который курит Pall Mall, держит птицу.

Жилец из среднего дома пьет молоко.

Жилец из желтого дома курит Dunhill.

Норвежец живет в первом доме.

Курильщик Marlboro живет около того, кто держит кошку.

Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит Dunhill.

Курильщик сигарет Winfield пьет пиво.

Норвежец живет около голубого дома.

Немец курит Rothmans.

Курильщик Marlboro живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Это всё, что необходимо для решения задачи.

Приложение 9

## Уравнения с параметрами

### 1. *Теоретические основы решения уравнений с параметрами.*

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, ..., z; \alpha,\beta,..., \gamma) = 0 \qquad (F)$$

с неизвестными $x, y, ..., z$ и с параметрами $\alpha,\beta, ..., \gamma$; при всякой допустимой системе значений параметров $\alpha_0,\beta_0, ..., \gamma_0$ уравнение (F) обращается в уравнение

$$F(x, y, ..., z; \alpha_0,\beta_0, ..., \gamma_0) = 0 \qquad (F_0)$$

с неизвестными $x, y,..., z$, не содержащее параметров. Уравнение $(F_0)$ имеет некоторое вполне определенное множество (быть, может, пустое) решений.

Аналогично рассматриваются системы уравнений, содержащих параметры. Допустимыми системами значений параметров считаются системы, допустимые для каждого уравнения в отдельности.

**Определение.** *Решить уравнение (или систему), содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения (системы).*

Понятие эквивалентности применительно к уравнению, содержащим параметры, устанавливается следующим образом.

**Определение.** *Два уравнения (системы)*

$$F(x, y, ..., z; \alpha,\beta, ..., \gamma) = 0 \ (F),$$

$$\Phi (x, y, ..., z; \alpha,\beta, ..., \gamma) = 0 \ (\Phi)$$

*с неизвестным $x, y,..., z$ и с параметрами $\alpha,\beta, ..., \gamma$ называются эквивалентными, если для обоих уравнений (систем) множество допустимых систем значений параметров одно и то же и при всякой допустимой системе значений, параметров оба уравнения (системы уравнений) эквивалентны.*

Итак, *эквивалентные уравнения при всякой допустимой системе значений параметров имеют одно и то же множество решений*.

Преобразование уравнения, изменяющее множество допустимых систем значений параметров, приводит к уравнению, не эквивалентному данному уравнению.

Предположим, что каждое из неизвестных, содержащихся в уравнении

$$F(x, y, z; \alpha,\beta, \ \dots, \gamma)=0 \ (F)$$

задано в виде некоторой функции от параметров:

$$x = x(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma);$$

$$y = y(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma); \dots$$

$$z=z(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma). \quad (X)$$

Говорят, что система функций (X), заданных совместно, удовлетворяет уравнению (F), если при подстановке этих функций вместо неизвестных $x$, $y$,..., $z$ в уравнение (F) левая его часть обращается в нуль тождественно при всех допустимых значениях параметров:

$$F(x(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma), y(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma), \dots, z(\alpha,\beta, \ \dots, \gamma)) \equiv 0.$$

При всякой допустимой системе численных значений параметров $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0, \ \dots, \gamma= \gamma_0$ соответствующие значения функций ($X$) образуют решение уравнения

$$F(x, y, \dots, z; \alpha_0,\beta_0, \ \dots, \gamma_0) =0$$

## 2. *Основные виды уравнений с параметрами*

### 2.1 Линейные и квадратные уравнения

Линейное уравнение, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами : $ax = b$, где $x$ – неизвестное, $a$, $b$ – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра $a$ является значение $a = 0$.

1. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров $a$ и $b$ оно имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x = b$.

В этом случае значение $b = 0$ является особым значением параметра $b$.

2.1. При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

2.2. При $b = 0$ уравнение примет вид : $0 \cdot x = 0$.

Решением данного уравнения является любое действительное число.

П р и м е р . Решим уравнение

$$2a(a - 2)\,x = a - 2. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при $x$ обращается в 0. Такими значениями являются $a=0$ и $a=2$. При этих значениях $a$ невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при $x$. В то же время при значениях параметра $a \neq 0$, $a \neq 2$ это деление возможно. Таким образом, целесообразно множество всех действительных значений параметра разбить на подмножества

$$A_1=\{0\},\ A_2=\{2\} \text{ и } A_3 = \{a\neq 0,\ a\neq 2\}$$

и решить уравнение (2) на каждом из этих подмножеств, т. е. решить уравнение (2) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра:

1) $a=0$ ; 2) $a=2$ ; 3) $a\neq 0$, $a\neq 2$

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a=0$ уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = -2$.

Это уравнение не имеет корней.

2) При $a=2$ уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = 0$.

Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При $a\neq 0$, $a\neq 2$ из уравнения (2) получаем, $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$

откуда $x = \dfrac{1}{2a}$ .

0 т в е т: 1) если, $a$=0, то корней нет;

2) если, $a$=2, то $x$ — любое действительное число;

3) если, $a \neq 0$, $a \neq 2$ , то $x = \frac{1}{2a}$.

П р и м е р . Решим уравнение

$$(a - 1)\, x^2 + 2\,(2a+1)\, x + (4a+3) = 0; \qquad (3)$$

Р е ш е н и е. В данном случае контрольным является значение $a$=1. Дело в том, что при $a$=1 уравнение (3) является линейным, а при $a \neq 1$ оно квадратное (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (3) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a$ =l; 2) $a \neq 1$. Рассмотрим эти случаи.

1) При $a$=1 уравнение (3) примет вид $6x+7=0$.

Из этого уравнения находим $x = -\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (3) обращается в 0.

Дело в том, что если дискриминант $D=0$ при $a=a_o$, то при переходе значения $D$ через точку $a_o$ дискриминант может изменить знак (например, при $a<a_o$ , D< 0, и при $a>a_o$, D>0). Вместе с этим при переходе через точку $a_0$ меняется и число действительных корней квадратного уравнения (в нашем примере при $a<a_o$ корней нет, так как D< 0, а при $a>a_o$ , D>0 уравнение имеет два корня). Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых обращается в 0 дискриминант квадратного уравнения, также относят к контрольным значениям.

Составим дискриминант уравнения (3):

$$\frac{D}{4} = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3).$$

После упрощений получаем $\frac{D}{4} = 5a+4$.

Из уравнения $\frac{D}{4}$ = 0 находим $a$ = $-\frac{4}{5}$ — второе контрольное значение параметра $a$. При этом если $a < -\frac{4}{5}$, то D <0; если $a \geq -\frac{4}{5}$, , то D≥0.

Таким образом, осталось решить уравнение (3) в случае, когда $a < -\frac{4}{5}$ и в случае, когда { $a \geq -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$ }.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение (3) не имеет действительных корней; если же

{ $a \geq -\frac{4}{5}$, $a \neq 1$ }, то находим $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

Ответ: 1) если, $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет ;

2) если, $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$ ;

3) если, $a \geq -\frac{4}{5}$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$, $a \neq 1$

## 2.2 Дробно-рациональные уравнения с параметрами, сводящиеся к линейным.

Процесс решения дробных уравнений протекает по обычной схеме: дробное уравнение заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего учащиеся решают известным им способом целое уравнение, исключая посторонние корни, т. е. числа, которые обращают общий знаменатель в нуль. В случае уравнений с параметрами эта задача более сложная. Здесь, чтобы исключить посторонние корни, требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, т. е. решать соответствующие уравнения относительно параметра.

П р и м ер . Решим уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)} \qquad (4)$$

Р е ш е н и е. Значение $a=0$ является контрольным. При $a=0$ уравнение (4) теряет смысл и, следовательно, не имеет корней. Если $a\neq 0$, то после преобразований уравнение (4) примет вид:

$$x^2 + 2\,(1 - a)\,x + a^2 - 2a - 3 = 0. \qquad (5)$$

Найдем дискриминант уравнения (5)

$$\frac{D}{4} = (1 - a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4.$$

Находим корни уравнения (5): $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

При переходе от уравнения (4) к уравнению (5) расширилась область определения уравнения (4), что могло привести к появлению посторонних корней. Поэтому необходима проверка.

П р о в е р к а. Исключим из найденных значений х такие, при которых

$$x_1+1=0,\; x_1+2=0,\; x_2+1=0,\; x_2+2=0.$$

Если $x_1+1=0$, т. е. $(a+1)+1=0$, то $a = -2$.

Таким образом, при $a = -2$, $x_1$ — посторонний корень уравнения (4).

Если $x_1+2=0$, т. е. $(a+1)+2=0$, то $a = -3$.

Таким образом, при $a = -3$, $x_1$ — посторонний корень уравнения (4).

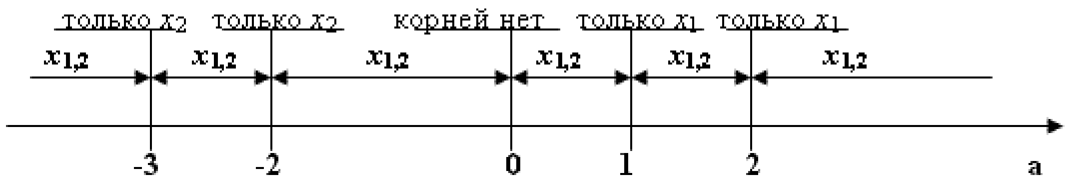
Если $x_2+1 =0$, т. е. $(a - 3)+1=0$, то $a=2$.

Таким образом, при $a=2$, $x_2$ — посторонний корень уравнения (4).

Если $x_2+2=0$, т. е. $(a - 3)+2=0$, то $a=1$.

Таким образом, при $a = 1$, $x_2$ — посторонний корень уравнения (4).

Для облегчения выписывания ответа сведем полученные результаты на рисунке.




В соответствии с этой иллюстрацией

при $a = -3$ получаем $x = -3 - 3 = -6$;

при $a = -2$ $x = -2 - 3 = -5$;

при $a = 1$ $x = 1 + 1 = 2$;

при $a = 2$ $x = 2 + 1 = 3$.

Итак, можно записать

О т в е т: 1) если $a = -3$, то $x = -6$;

2) если $a = -2$, то $x = -5$;

3) если $a = 0$, то корней нет;

4) если $a = 1$, то $x = 2$;

5) если $a = 2$, то $x = 3$;

6) если $a \neq -3$; $a \neq -2$; $a \neq 0$; то $x_1 = a + 1$,

$a \neq 1$; $a \neq 2$, то $x_2 = a - 3$.

### 2.3 Иррациональные уравнения с параметрами.

Существует несколько способов решения иррациональных уравнений с параметрами.

Познакомимся с ними, разобрав следующий пример.

П р и м е р . Решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$. (6)

Р е ш е н и е:

Возведем в квадрат обе части иррационального уравнения с последующей проверкой полученных решений.

Перепишем исходное уравнение в виде: $\sqrt{a - x^2} = x - 1$ (7)

При возведении в квадрат обеих частей исходного уравнения и проведения тождественных преобразований получим:

$$2x^2 - 2x + (1 - a) = 0, \quad D = 2a - 1.$$

Особое значение : $a = 0{,}5$. Отсюда :

1) при $a > 0{,}5$ $x_{1,2} = 0{,}5\ (\ 1 \pm \sqrt{2a-1}\ )$;
2) при $a = 0{,}5$ $x = 0{,}5$ ;
3) при $a < 0{,}5$ уравнение не имеет решений.

Проверка:

1) при подстановке $x = 0{,}5$ в уравнение (7), равносильное исходному, получим неверное равенство.

   Значит, $x = 0{,}5$ не является решением (7) и уравнения (6).

2) при подстановке $x_1 = 0{,}5\ (\ 1 \pm \sqrt{2a-1}\ )$ в (7) получим:

$$-0{,}5\ (\ 1 + \sqrt{2a-1}\ ) = \sqrt{a} - (\ 0{,}5\ (\ 1 - \sqrt{2a-1}\ ))^2$$

Так как левая часть равенства отрицательна, то $x_1$ не удовлетворяет исходному уравнению.

3) Подставим $x_2$ в уравнение (7):

$$\sqrt{a - \left(\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right)^2} = \frac{1+2a-1}{2}$$

Проведя равносильные преобразования, получим:

Если $\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2} \geq 0$, то можно возвести полученное равенство в квадрат:

$$\frac{a-\sqrt{2a-1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2}\right)^2$$

Имеем истинное равенство при условии, что $\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2} \geq 0$

Это условие выполняется, если $a \geq 1$. Так как равенство истинно при $a \geq 1$, а $x_2$ может быть корнем уравнения (6) при $a > 0{,}5$, следовательно, $x_2$ – корень уравнения при $a \geq 1$.

## 2.4 Тригонометрические уравнения с параметрами.

Большинство тригонометрических уравнений с параметрами сводится к решению простейших тригонометрических уравнений трех типов. При решении таких уравнений необходимо учитывать ограниченность тригонометрических функций y = sin x и y = cos x.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р **.** Решить уравнение: cos $\sqrt{x-1}$ =2$a$.

Р е ш е н и е: Так как $E(\cos t)=[-1;\ 1]$, то имеем два случая.

**1.** При $|a| > 0{,}5$ уравнение не имеет решений.

**2.** При $|a| \le 0{,}5$ имеем:

**а)** $\sqrt{x-1}$ = arcos 2$a$+2πn. Так как уравнение имеет решение, если arcos $2a+2\pi n \ge 0$, то $n$ может принимать значения $n$=0, 1, 2, 3,....

Решением уравнения является $x = 1+(2\pi n + \arccos 2a)^2$

**б)** $\sqrt{x-1}$ = -arccos 2$a$+$\pi n$. Так как уравнение имеет решение при условии, что $-\arccos 2a+2\pi n>0$, то $n$=1, 2, 3,...,

и решение уравнения $x=1+(2\pi n - \arccos 2a)^2$ .

О т в е т: если $|a| > 0{,}5$, решений нет;

если $|a| \le 0{,}5$ , $x = 1+(2\pi n+\arccos 2a)^2$ при $n$ = 0, 1, 2,...

и $x =1+(2\pi n - \arccos 2a)^2$ при $n \in$ N.

П р и м е р . Решить уравнение: tg $ax^2 =\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е: $ax^2 = \frac{\pi}{3} +\pi n,\ n \in Z$

Если коэффициент при неизвестном зависит от параметра, то появляется особое значение параметра. В данном случае:

1. Если $a$=0, то уравнение не имеет решений.

2. Если $a \ne 0$, то $x^2 = \frac{\pi}{3a}+\frac{\pi n}{a}$ , $n \in Z$

Уравнение имеет решение, если $\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi n}{a} \ge 0$. Выясним, при каких значениях $n$ и $a$ выполняется это условие:

$$\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi n}{a}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(1+3n)}{3a}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1+3n\geq 0,\\ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}1+3n\leq 0,\\ a<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $n \geq -\frac{1}{3}$ и $a > 0$ или $n \leq -\frac{1}{3}$ и $a < 0$.

Итак, уравнение имеет решение $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi n}{a}}$, если

1) $a > 0$ и $n = 1,2,3,\ldots$ или

2) $a < 0$ и $n \in Z$.

О т в е т: при $a = 0$ решений нет;

при $a > 0$ и $n = 1,2,3,\ldots$ или $a < 0$ и $n \in Z$ $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3a}+\frac{\pi n}{a}}$.

П р и м е р. Решите уравнение: $a \sin bx = 1$

Р е ш е н и е: Особое значение параметра $a$ : $a = 0$.

1. При $a = 0$ решений нет.

2. При $a \neq 0$ $\sin bx = \frac{1}{a}$. Имеем 2 случая:

2.1. Если $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$, то решений нет.

2.2. Если $\left|\frac{1}{a}\right| \leq 1$, то особое значение $b = 0$:

2.2.1. Если $b = 0$, то решений нет.

2.2.2. Если $b \neq 0$, то $x = \frac{1}{b}((-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n), n\in Z$

О т в е т: при $a = 0$ или $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$ и $a \neq 0$ или $a \neq 0$ $b = 0$ решений нет;

при $a \neq 0$ и $\left|\frac{1}{a}\right| \leq 1$ и $b \neq 0$ $x = \frac{1}{b}((-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n), n\in Z$

## 2.5 Показательные уравнения с параметрами.

Многие показательные уравнения с параметрами сводятся к элементарным показательным уравнениям вида

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)} \ (*), \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Область допустимых значений такого уравнения находится как пересечение областей допустимых значений функций *f(x)* и *φ(x).*
Для решения уравнения (*) нужно рассмотреть следующие случаи:

1) При $a = b = 1$ решением уравнения (*) является область его допустимых значений *D*.
2) При $a = 1, b \neq 1$ решением уравнения (*) служит решение уравнения $\varphi(x) = 0$ на области допустимых значений *D*.
3) При $a \neq 1, b = 1$ решение уравнения (*) находится как решение уравнения $f(x) = 0$ на области *D*.
4) При $a = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) уравнение (*) равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ на области *D*.
5) При $a \neq b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) уравнение (*) тождественно уравнению $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{\varphi(x)}$ ($c > 0, c \neq 1$) на области *D*.

П р и м е р. Решите уравнение: $a^{x+1} = b^{3-x}$

Р е ш е н и е. ОДЗ уравнения: $x \in R$, $a > 0$, $b > 0$.

1) При $a \le 0, b \le 0$ уравнение не имеет смысла.
2) При $a = b = 1$, $x \in R$.
3) При $a = 1, b \neq 1$ имеем: $b^{3-x} = 1$ или $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$.
4) При $a \neq 1, b = 1$ получим: $a^{x+1} = 1$ или $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.
5) При $a = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) имеем: $x + 1 = 3 - x \Rightarrow x = 1$.
6) При $a \neq b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) прологарифмируем исходное уравнение по основанию *a,* получим:

$$\log_a a^{x+1} = \log_a b^{3-x}, \quad x + 1 = (3 - x)\log_a b, \quad x = \frac{3\log_a b - 1}{\log_a b + 1}$$

О т в е т: при $a \le 0, b \le 0$ уравнение не имеет смысла;

при $a = b = 1$, $x \in R;$

при $a = 1, b \neq 1, x = 3$.

при $a \neq 1, b = 1, x = -1$

при $a = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$, $x = 1$

при $a \neq b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$, $x = \dfrac{3\log_a b - 1}{\log_a b + 1}$

## 2.6 Логарифмические уравнения с параметром.

Решение логарифмических уравнений с параметрами сводится к нахождению корней элементарного логарифмического уравнения. Важным моментом решения уравнений такого типа является проверка принадлежности найденных корней ОДЗ исходного уравнения.

П р и м е р. Решите уравнение

$$2 - \log_{a^2}(1 + x) = 3 \log_a \sqrt{x-1} - \log_{a^2}(x^2 - 1)^2$$

Р е ш е н и е. ОДЗ: $x > 1$, $a > 0, a \neq 1$.

Осуществим на ОДЗ цепочку равносильных преобразований исходного уравнения:

$$\log_a a^2 + \log_{a^2} (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1},$$

$$\log_a (a^2 (x^2 - 1)) = \log_a ((\sqrt{x-1})^3 \sqrt{x+1}),$$

$$a^2 (x^2 - 1) = (x - 1) \sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2 (x - 1)(x + 1) = (x - 1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

Так как $x \neq -1$ и $x \neq 1$, сократим обе части уравнения на $(x - 1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$.

$$a^2 \sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$a^4 (x + 1) = x - 1 \Rightarrow a^4 x + a^4 = x - 1 \Rightarrow x(1 - a^4) = a^4 + 1$$

Так как $a \neq -1$ и $a \neq 1$, то $x = \dfrac{1 + a^4}{1 - a^4}$.

Для того чтобы значения $x$ являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x > 1$, то есть $\frac{1+a^4}{1-a^4} > 1$.

Выясним, при каких значениях параметра $a$ это неравенство истинно:

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0, \quad \frac{2a^4}{1-a^4} > 0$$

Так как $a > 0$, то полученная дробь положительна, если $1 - a^4 > 0$, то есть при $a < 1$.

Итак, при $0 < a < 1$, $x > 1$,

значит, при $0 < a < 1$ $x$ является корнем исходного уравнения.

О т в е т: при $a \leq 0$, $a = 1$ уравнение не имеет смысла;

при $a > 1$ решений нет;

при $0 < a < 1$ $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$.

## ТЕСТ 1

Вариант I

1. Решите уравнение $k(x - 4) + 2(x + 1) = 1$ относительно x.

   а) при k=-2 корней нет; при k ≠ =-2 $x = \frac{4k-1}{k+2}$;

   б) при k ≠ -2 корней нет; при k=-2 $x = \frac{4k-1}{k+2}$;

   в) при k=-2 корней нет; при k ≠ =-2 и k ≠ =0,25 $x = \frac{4k-1}{k+2}$.

2. Решите уравнение $2a(a - 2)x = a^2 - 5a + 6$ относительно $x$.

   а) при $a=2$ $x \in R$; при $a=0$ корней нет; при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{(a+3)(a+2)}{2a(a-2)}$;

   б) при $a=2$ $x \in R$; при $a=0$ корней нет; при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{a-3}{2a}$;

   в) при $a=2$ $x \in R$; при $a=0$ корней нет; при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \frac{(a+2)}{2a(a-2)}$.

3. При каких значениях b уравнение

$1+2x - bx = 4+x$ имеет отрицательное решение.

а) b<1 ; б) b>1 ; в) b=1

4. При каких значениях a парабола $y = ax^2 - 2x + 25$ касается оси x?

а) $a$=25 ; б) $a$=0 и $a$= 0,04 ; в) $a$=0,04.

5. При каких значениях k уравнение

$(k - 2)x^2 = (4 - 2k)x+3 = 0$ имеет единственное решение?

а) k=-5, k= -2 ; б) k=5 ; в) k=5, k= 2 .

6. Решите относительно $x$ уравнение $\frac{5-x}{2b+2}+\frac{2x}{1-b}=\frac{3b}{b^2-1}$.

а) при b ≠ +1, b ≠ $-\frac{3}{5}$ $x=-\frac{5+b}{3+5b}$ ; при b= $-\frac{3}{5}$ решений нет;

при b=±1 нет смысла;

б) при b ≠ $-\frac{3}{5}$ $x=-\frac{5+b}{3+5b}$ ; при b= $-\frac{3}{5}$ решений нет;

при b=±1 нет смысла;

в) при b= $-\frac{3}{5}$ $x=-\frac{5+b}{3+5b}$ ; при b=±1 нет смысла.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение имеет решение $\sqrt{3x-a}=a-2x$

а) $a \geq 3$ ; б) $a$=4 ; в) $a \geq 0$

8. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет 2 корня?

а) $-0{,}25 \leq a \leq 0$ ; б) $-0{,}25 < a \leq 0$ ; в) $-0{,}25 < a < 0$

9. При каких значениях параметра c уравнение $\frac{x-2}{4}=\frac{cx-c-3}{3c}$ имеет 2 корня?

а) c ∈ ( - ∞ ; -1,5√3)U(1.5√3; + ∞); б) при c = ±1,5√3; в) c ∈ ( - ∞ ; -1,5√3)

Вариант II

1. Решите уравнение $2x(a+1)=3a(x+1)+7$ относительно $x$.

а) при $a=-2$ корней нет; при $a \neq -2$ $x=\frac{3a+7}{2-a}$ ;

б) при $a \neq -2$ корней нет; при $a=-2$ $x=\frac{3a+7}{2-a}$ ;

в) при $a \neq -2$ и $a \neq -\frac{7}{3}$ корней нет; при $a=-2$ $x=\frac{3a+7}{2-a}$ .

2. Решите уравнение $(a^2-81)x=a^2+7a-18$ относительно $x$.

а) при $a=-9$ $x \in R$ ; при $a=9$ корней нет; при $a \neq -9$ и $a \neq 9$ $x=\frac{a-2}{a-9}$ ;

б) при $a=9$ $x \in R$ ; при $a=-9$ корней нет; при $a \neq -9$ и $a \neq 9$ $x=\frac{a-2}{a-9}$ ;

в) при $a=-9$ $x \in R$ ; при $a=9$ корней нет; при $a \neq -9$ $x=\frac{a-2}{a-9}$ ;

3. При каких значениях b уравнение

$2+4x-bx=3+x$ имеет отрицательное решение?

а) $b<3$ ; б) $b<2$ ; в) $b>3$

4. При каких значениях k уравнение $kx^2-(k-7)x+9=0$ имеет два равных положительных корня?

а) k=49, k= 1 ; б) k=1 ; в) k=49 .

5. При каких значениях a уравнение

$ax^2-6x+a=0$ имеет два различных корня?

а) $a \in (-3;0)\cup(0;3)$; б) при $a \in (-3;3)$ ; в) $c \in (-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

6. Решите относительно x уравнение $\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}$

а) при $a \neq 1, a \neq 2{,}25, a \neq -0{,}4$, $x=\frac{31-2a}{4a-9}$ ; $a=2{,}25$, $a=-0{,}4$,решений нет;
при $a=1$ нет смысла;

б) при $a \neq 2,\ 25$, $a \neq -0{,}4$, $x=\frac{31-2a}{4a-9}$ ; $a=2{,}25$, $a=-0{,}4$,решений нет;
при $a=1$ нет смысла;

в) при $a \neq 1$, $a \neq -0{,}4$, $x = \dfrac{31-2a}{4a-9}$ ; $a$=-0,4,решений нет; при $a$=1 нет смысла.

7. При каких значениях параметра а уравнение имеет решение $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ .

а) $a \geq 2/3$ ; б) $a \geq 2/3\sqrt{6}$ ; в) $a \leq 2/3\sqrt{6}$ .

8. При каких значениях $a$ уравнение $\sqrt{x-1}=a$ имеет 2 корня?

а) $a \geq 0$ ; б) ни при каких ; в) $a \geq 1$

9. При каких значениях параметра с уравнение $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{cx-c-3}{3c}$ имеет 2 корня?

а) $c \in (-\infty; -1{,}5\sqrt{3}) \cup (1.5\sqrt{3}; +\infty)$; б) при $c = \pm 1{,}5\sqrt{3}$; в) $c \in (-\infty; -1{,}5\sqrt{3})$

## ТЕСТ 2

### Вариант I

1. Решите уравнение $3\cos x = 4b + 1$ для всех значений параметра.

а) при $b \in (-1; 0{,}5)$ $x = \pm \arccos \dfrac{4b+1}{3} + 2\pi k, k \in Z$ ;

при $b \in (-\infty;-1] \cup [0{,}5;+\infty)$ решений нет;

б) при $b \in [-1; 0{,}5]$ $x = \pm \arccos \dfrac{4b+1}{3} + 2\pi k, k \in Z$ ;

при $b \in (-\infty;-1) \cup (0{,}5;+\infty)$ решений нет;

в) $b \in (-\infty;-1] \cup [0{,}5;+\infty)$ $x = \pm \arccos \dfrac{4b+1}{3} + 2\pi k, k \in Z$ ;

$b \in (-1; 0{,}5)$ при решений нет;

2. Найдите все действительные значения параметра $a$, при которых уравнение $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$.

а) $a \in [-4; 2]$ ; б) $a \in (-4; 2)$ ; в) $a \in [-4; 2)$.

3. При каких значениях $a$ уравнение $\cos^4 x + \sin^4 x = a$ имеет корни?

а) $a \in [0{,}5; 1]$ ; б) $a \in [-1; 0{,}5]$ ; в) $a \in [-0{,}5; 1)$.

4. Решите уравнение $a^{-(x+0.5)}a^{-0.5} = a \times a^{-2x}$

а) при $a \leq 0$ $x \in R$ ; при $a > 0$, $a \neq 1$ $x = 2$; при $a = 1$ не имеет смысла б) при $a > 0$ $x \in R$ ; при $a = 1$ $x = 2$; при $a \le 0$ не имеет смысла.

в) при $a = 1$ $x \in R$ ; при $a > 0, a \ne 1$ $x = 2$; при $a \le 0$ не имеет смысла.

5. При каких значениях параметра уравнение

$4^x - a2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственное решение?

а) 2; б) 1 ; в) -1.

6. Решите уравнение $\log_a x^2 + 2\log_a (x + 2) = 1$.

а) при $a \le 1$ $x = 0{,}5(2+\sqrt{4-2\lg a})$ ; при $a = 100$ $x = 1$.

б) при $a > 100$ решений нет; при $1<a<100$ $x = 0{,}5(2+\sqrt{4-2\lg a})$;
при $a = 100$ $x = 1$; при $a \le 1$ не имеет смысла .

в) при $a > 100$ решений нет ; при $1<a<100$ $x = 0{,}5(2+\sqrt{4-2\lg a})$ ;
при $a \le 1$ не имеет смысла .

7. Найдите все значения параметра,для которых данное уравнение имеет только один корень $1+\log_2(ax) = 2\log_2(1 - x)$

а) $a > 0, a = 2$ ; б) $a > 0, a = -2$ ; в) $a < 0, a = -2$ .

8. Решите уравнение $x^{\log_a x} = a^2 x,$ $a > 0, a \ne 1$

а) $a$ ; $\frac{1}{a}$ ; б) $a^2$ ; - $\frac{1}{a}$ ; в ) $a^2$ ; $\frac{1}{a}$

Вариант II

1. Решите уравнение $\cos(3x + 1) = b$ для всех значений параметра.

а) при $|b| \le 1$ $x = \frac{-1 \pm \arccos b4b + 2\pi k}{3}, k \in Z$ ; при $|b| > 1$ решений нет;

б) при $|b| \le 1$ и $b=0$ $x = \frac{-1 \pm \arccos b4b + 2\pi k}{3}, k \in Z$ ; при $|b| > 1$ решений нет;

в) при $|b| > 1$ $x = \frac{-1 \pm \arccos b4b + 2\pi k}{3}, k \in Z$ ; при $|b| < 1$ решений нет;

2. Найдите все действительные значения параметра $a$,
при которых уравнение $\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$.

а) $a \in (2 ; 6)$ ; б) $a \in (2 ; 4]$ ; в) $a \in [2 ; 6]$.

3. При каких значениях $a$ уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = a$ имеет корни?

а) $a \in [0{,}25; 0{,}5]$ ; б) $a \in [0{,}25; 1]$ ; в) $a \in [-0{,}25; 1]$.

4. Решите уравнение $a^{-(x+0.5)} a^{-0.5} = a \times a^{-2x}$

а) при $a \le 0$ $x \in R$ ; при $a > 0$, $x = 1$; при $a = 1$ не имеет смысла.

б) при $a = 1$ $x \in R$ ; при $a > 0$, $a \neq 1$ $x = 1$; при $a \le 0$ не имеет смысла.

в) при $a > 0$ $x \in R$ ; при $a = 1$ , $x = 1$; при $a \le 0$ не имеет смысла.

5. При каких значениях параметра уравнение

$a(2^x + 2^{-x}) = 5$ имеет единственное решение?

а) -2,5; 2,5 ; б) 2; 2,5 ; в) –2,5.

6. Решите уравнение 3 lg $(x - a)$ - 10 lg $(x - a)$+1 = 0.

а) $x = a + 1000$, $x = a + \sqrt[3]{10}$ ;

б) $x = a - \sqrt[3]{10}$ , $x = a - 1000$ ;

в) $x = a - \sqrt[3]{10}$ , $x = a + 1000$ .

7. Найдите все значения параметра,для которых данное уравнение имеет только один корень $\dfrac{\lg(kx)}{\lg(x+1)} = 2$

а) 4 ; б) -4 ; в) - 2 .

8. Решите уравнение $x^{\log_a x} = a^{\log_a^3 x}$, $a > 0, a \neq 1$

а) -1 ; $a$ ; б) 1 ; - $a$; в ) 1 ; $a$

Приложение 10

# Формулы по теории вероятностей

## 1. Основные формулы комбинаторики

а) перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$,

перестановки с повторениями $\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ .

б) размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \ldots (n-m+1)$,

размещение с повторениями $\overline{A_n^m} = n^m$.

в) сочетания $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$,

сочетания с повторениями $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$ .

### Схема решения комбинаторных задач

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">Выбор правила</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Правило суммы</td><td colspan="3" align="center">Правило произведения</td></tr>
<tr><td colspan="3">Если элемент А можно выбрать m способами, а элемент В – n способами, то А или В можно выбрать (m+n) способами</td><td colspan="3">Если элемент А можно выбрать m способами, а после этого элемент В – n способами, то А и В можно выбрать (m·n) способами</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Выбор формулы</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Учитывается порядок в множестве?</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">да</td><td colspan="2" rowspan="3" align="center">нет</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Все ли элементы входят в множество?</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">да</td><td colspan="2" align="center">нет</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">перестановки</td><td colspan="2" align="center">размещения</td><td colspan="2" align="center">сочетания</td></tr>
<tr><td align="center">без повторений</td><td align="center">с повторений</td><td align="center">без повторений</td><td align="center">с повторений</td><td align="center">без повторений</td><td align="center">с повторений</td></tr>
<tr><td align="center">$\boldsymbol{P_n}$</td><td align="center">$\boldsymbol{\overline{P_n}}$</td><td align="center">$\boldsymbol{A_n^k}$</td><td align="center">$\boldsymbol{\overline{A_n^k}}$</td><td align="center">$\boldsymbol{C_n^k}$</td><td align="center">$\boldsymbol{\overline{C_n^k}}$</td></tr>
</table>

**2. Классическое определение вероятности.**

$P(A)=\frac{m}{n}$, где $m$ - число благоприятствующих событию $A$ исходов, $n$ - число всех элементарных равновозможных исходов.

**3. Вероятность суммы событий**

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

**4. Вероятность произведения событий**

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A),$$
$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A\,|\,B).,$$

$P(A\,|\,B)$ - условная вероятность события $A$ при условии, что произошло событие $B$,

$P(B\,|\,A)$ - условная вероятность события $B$ при условии, что произошло событие $A$.

**5. Формула Бернулли**

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ - вероятность появления события ровно $k$ раз при $n$ независимых испытаниях, $p$ - вероятность появления события при одном испытании.

## Задачи по теории вероятностей с решениями

### 1. *Комбинаторика*

***Задача 1***. В группе 30 студентов. Необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует способов это сделать?
*Решение.* Старостой может быть выбран любой из 30 студентов, заместителем - любой из оставшихся 29, а профоргом – любой из оставшихся 28 студентов, т.е. $n_1=30$, $n_2=29$, $n_3=28$. По правилу умножения общее число N способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно
$N=n_1\times n_2\times n_3=30\times 29\times 28=\underline{24360}$.

***Задача 2***. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

*Решение.* Первое письмо имеет $n_1=2$ альтернативы – либо его относит к адресату первый почтальон, либо второй. Для второго письма также есть $n_2=2$ альтернативы и т.д., т.е. $n_1=n_2=\ldots=n_{10}=2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений писем между двумя почтальонами равно $N = n_1 n_2 \ldots n_{10} = \underbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}_{10\ \text{ðàç}} = 2^{10} = 1024$.

***Задача 3.*** В ящике 100 деталей, из них 30 – деталей 1-го сорта, 50 – 2-го, остальные – 3-го. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали 1-го или 2-го сорта?

*Решение.* Деталь 1-го сорта может быть извлечена $n_1=30$ способами, 2-го сорта – $n_2=50$ способами. По правилу суммы существует $N=n_1+n_2=30+50=\underline{80}$ способов извлечения одной детали 1-го или 2-го сорта.

***Задача 5***. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
*Решение.* Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число равно $P_7 = 7! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 = 5040.$

***Задача 6***. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены различные премии?

*Решение.* Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом, так и их порядком. Так как каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, то одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5: $N = \overline{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000.$

***Задача*** *7.* В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

*Решение.* Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно $C_{16}^{2} = \frac{16!}{14!2!} = \frac{15 \times 16}{1 \times 2} = 120.$

***Задача 8***. В условиях задачи 6 определить, сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены одинаковые призы?

*Решение.* Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, определяемое по формуле

$$\overline{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2002.$$

***Задача 9.*** Садовник должен в течении трех дней посадить 6 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

*Решение.* Предположим, что садовник сажает деревья в ряд, и может принимать различные решения относительно того, после какого по счету дерева остановиться в первый день и после какого – во второй. Таким образом, можно представить себе, что деревья разделены двумя перегородками, каждая из которых может стоять на одном из 5 мест (между деревьями). Перегородки должны стоять там по одной, поскольку иначе в какой-то день не будет посажено ни одного дерева. Таким образом, надо выбрать 2 элемента из 5 (без повторений). Следовательно, число способов $C_5^2 = 10$.

***Задача 10.*** Сколько существует четырехзначных чисел (возможно, начинающихся с нуля), сумма цифр которых равна 5?

*Решение.* Представим число 5 в виде суммы последовательных единиц, разделенных на группы перегородками (каждая группа в сумме образует очередную цифру числа). Понятно, что таких перегородок понадобится 3. Мест для перегородок имеется 6 (до всех единиц, между ними и после). Каждое место может занимать одна или несколько перегородок (в последнем случае между ними нет единиц, и соответствующая сумма равна нулю). Рассмотрим эти места в качестве элементов множества. Таким образом, надо выбрать 3 элемента из 6 (с повторениями). Следовательно, искомое количество чисел $\overline{C}_6^3 = C_8^3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56.$

***Задача 11***. Сколькими способами можно разбить группу из 25 студентов на три подгруппы А, В и С по 6, 9 и 10 человек соответственно?

*Решение.* Здесь n=25, k=3, $n_1$=6, $n_2$=9, $n_3$=10. Согласно формуле, число таких разбиений равно $N_{25}(6,9,10) = \dfrac{25!}{6!9!10!}$.

***Задача 12.*** Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

*Решение.* Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр, при этом фактически все семь мест в этом числе делятся на три группы: на одни места ставится цифра «4», на другие места – цифра «5», а на третьи места – цифра «6». Таким образом, множество состоит из 7 элементов (n=7), причем $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, и, следовательно, количество таких чисел равно

$$N_7(3;2;2)=\frac{7!}{3!2!2!}=210.$$

## 2. *Классическая вероятностная модель. Геометрическая вероятность.*

***Задача 1***. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

*Решение*. Элементарными исходами здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, будем считать их выбор неупорядоченным (и бесповторным). Общее число элементарных исходов $n=|\Omega|$ равно числу способов выбрать 3 фрукта из 9, т.е. числу сочетаний $C_9^3$. Число благоприятствующих исходов $m=|A|$ равно числу способов выбора 3 апельсинов из имеющихся 5, т.е. $C_5^3$. Тогда искомая вероятность

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}}=0{,}12\,.$$

***Задача 2***. Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из студентов любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

*Решение.* Вначале подсчитаем общее количество исходов. Первый из студентов выбирает одно из 10 чисел и имеет $n_1=10$ возможностей, второй тоже имеет $n_2$=10 возможностей, наконец, третий также имеет $n_3$=10 возможностей. В силу правила умножения общее число способов равно: $n= n_1 \times n_2 \times n_3=10^3 = 1000$, т.е. все пространство содержит 1000 элементарных исходов. Для вычисления вероятности события А удобно перейти к противоположному событию, т.е. подсчитать количество тех случаев, когда все три студента задумывают разные числа. Первый из них по-прежнему имеет $m_1$=10 способов выбора числа. Второй студент имеет теперь лишь $m_2$=9 возможностей, поскольку ему приходится заботиться о том, чтобы его число не совпало с задуманным числом первого студента. Третий студент еще более ограничен в выборе — у него всего $m_3$=8 возможностей. Поэтому общее число комбинаций задуманных чисел, в которых нет совпадений, равно $m=10\cdot 9\cdot 8=720$. Случаев, в которых есть совпадения, остается 280. Следовательно, искомая вероятность равна P=280/1000= 0,28.

***Задача 3***. Найти вероятность того, что в 8-значном числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны.

*Решение*. Событие А={восьмизначное число содержит 4 одинаковые цифры}. Из условия задачи следует, что в числе пять различных цифр, одна из них повторяется. Число способов её выбора равно числу способов выбора одной цифры из 10 цифр. Эта цифра занимает любые 4 места в числе, что возможно сделать $C_8^4$ способами, так как порядок здесь не важен. Оставшиеся 4 места занимают различные цифры из неиспользованных девяти, и так как число зависит от порядка расположения цифр, то число способов выбора четырех цифр равно числу размещений $A_9^4$ . Тогда число благоприятствующих исходов $|A| = 10C_8^4 A_9^4$. Всего же способов составления 8-значных чисел равно $|\Omega|=10^8$. Искомая вероятность равна $P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10C_8^4 A_9^4}{10^8} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{5!} \cdot \frac{1}{10^7} = 0{,}021168$.

***Задача 4***. Шесть клиентов случайным образом обращаются в 5 фирм. Найти вероятность того, что хотя бы в одну фирму никто не обратится.

*Решение.* Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$, состоящее в том, что в каждую из 5 фирм обратился клиент, тогда в какую-то из них обратились 2 клиента, а в остальные 4 фирмы – по одному клиенту. Таких возможностей $|\overline{A}| = 5 \times N_6(2,1,1,1,1) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!}$. Общее количество способов распределить 6 клиентов по 5 фирмам $|\Omega| = 5^6$. Отсюда $P(\overline{A}) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!} \cdot \frac{1}{5^6} = 0{,}1152$.

Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}8848$.

***Задача 5.*** Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и N–M черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.

*Решение.* Так как порядок элементов здесь несущественен, то число всех возможных наборов объема n из N элементов равно числу сочетаний $C_N^n$.

Число испытаний, которые благоприятствуют событию А – "m белых шаров, n–m черных", равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, и, следовательно, искомая вероятность равна

P(A)=$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

***Задача 6****.* Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?

*Решение.* Здесь пространство элементарных исходов весь отрезок $\Omega = [0;\, 2]$, а множество благоприятствующих исходов $A = [0{,}5;\, 1{,}4]$, при этом длины этих отрезков равны $l(\Omega) = 2$ и $l(A) = 0{,}9$ соответственно. Поэтому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45.$$

***Задача 7 (задача о встрече)****.* Два лица А и В условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течении 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц А и В, если приход каждого из них может произойти наудачу в течении указанного часа и моменты прихода независимы?

*Решение.* Обозначим момент прихода лица А через x и лица В – через y. Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x-y| \le 20$. Изобразим x и y как координаты на плоскости, в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы представляются точками квадрата со стороной 60, а благоприятствующие встрече располагаются в заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры (рис. 2.1) к площади всего квадрата: $P(A) = (60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9$.

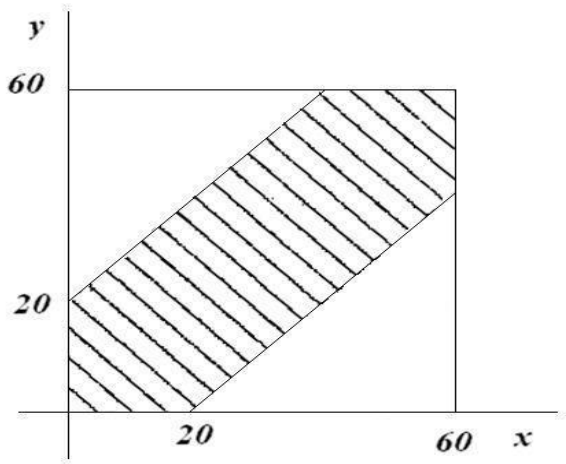



Рис. 2.1.

## 3. ***Основные формулы теории вероятностей***

***Задача 1***. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

*Решение*. Событие А={вынуты пуговицы одного цвета} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события $A_1$ и $A_2$ означают выбор пуговиц красного и синего цвета соответственно. Вероятность вытащить две красные пуговицы равна $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$, а вероятность вытащить две синие пуговицы

$P(A_2)=\frac{C_5^2}{C_{15}^2}$. Так как события $A_1$ и $A_2$ не могут произойти одновременно, то в силу теоремы сложения $P(A)=\frac{C_{10}^2+C_5^2}{C_{15}^2}=\frac{\frac{10!}{2!8!}+\frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}}=0{,}524.$

***Задача 2***. Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.

*Решение.* Обозначим через A, B и C события, заключающиеся в том, что случайно выбранный сотрудник фирмы владеет английским, немецким или французским соответственно. Очевидно, доли сотрудников фирмы, владеющих теми или иными языками, определяют вероятности этих событий. Получаем:

а) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}28+0{,}3-0{,}08=0{,}5$;

б) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-(P(AB)+P(AC)+P(BC))+P(ABC)=$

$=0{,}28+0{,}3+0{,}42-(0{,}08+0{,}1+0{,}05)+0{,}03=0{,}8$;

в) $1-P(A\cup B\cup C)=0{,}2$.

***Задача 3***. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

*Решение.* Пусть A={старший ребенок – мальчик}, B={в семье есть дети обоего пола}. Будем считать, что рождение мальчика и рождение девочки – равновероятные события. Если рождение мальчика обозначить буквой М, а рождение девочки – Д, то пространство всех элементарных исходов состоит из четырех пар: $\Omega = \{ММ, МД, ДМ, ДД\}$. В этом пространстве лишь два исхода (МД и ДМ) отвечают событию В. Событие АВ означает, что в семье есть дети обоего пола. Старший ребенок – мальчик, следовательно, второй (младший) ребенок – девочка. Этому событию АВ отвечает один исход – МД. Таким образом, |АВ|=1, |В|=2 и $P(A \mid B) = \dfrac{|AB|}{|B|} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5.$

***Задача 4***. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

*Решение.* Событие А={мастер проверил ровно две детали} означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая – стандартная. Значит, $A = A_1A_2$, где $A_1$={первая деталь оказалась нестандартной} и $A_2$={вторая деталь – стандартная}. Очевидно, что вероятность события $A_1$ равна $P(A_1) = 3/10,$ кроме того, $P(A_2 \mid A_1) = 7/9$, так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных. По теореме умножения

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 7/30.$$

***Задача 5***. В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

*Решение*. Событие А={хотя бы из одного ящика вынут белый шар} можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где события $A_1$ и $A_2$ означают появление белого шара из первого и второго ящика соответственно. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна $P(A_1) = 3/8$, а вероятность вытащить белый шар из второго ящика $P(A_2) = 6/10$. Кроме того, в силу независимости $A_1$ и $A_2$ имеем: $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{40}$. По теореме сложения получаем:

$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=3/8+6/10-9/40=3/4$.

***Задача 6***. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

*Решение.* Обозначим через $H_1, H_2, H_3$ гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$P(H_1)=6/30=0{,}2$, $P(H_2)=3/30=0{,}1$, $P(H_3)=21/30=0{,}7$.

Пусть событие А={слабо подготовившийся студент сдал экзамен}.

Тогда снова в силу условия задачи $P(A\,|\,H_1)=0{,}4$, $P(A\,|\,H_2)=0{,}1$, $P(A\,|\,H_3)=0{,}7$.

По формуле полной вероятности получаем: $P(A)=0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}58$.

***Задача*** *7*. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой А деталей 10% бракованных, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

*Решение.* Пусть событие G – появление годной детали. Вероятности гипотез о том, что деталь поставлена фирмами A, B, C, равны соответственно P(A)=0,5, P(B)=0,3, P(C)=0,2. Условные вероятности появления при этом годной детали равны P(G|A)=0,9, P(G|B)=0,95, P(G|C)=0,94

(как вероятности противоположных событий к появлению бракованной).

По формуле полной вероятности получаем:

P(G)=0,5·0,9+0,3·0,95+0,2·0,94=0,923.

***Задача 8*** (см. задачу 6). Пусть известно, что студент не сдал экзамен, т.е. получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

*Решение.* Вероятность получить «неуд» равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$. Требуется вычислить условные вероятности. По формулам Байеса получаем:

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}42} = 0{,}285, \text{ и аналогично,}$$

$$P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}42} = 0{,}214,\ P(H_3 \mid \overline{A}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}42} = 0{,}5.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

## 4. *Повторные независимые испытания. Теорема Бернулли*

***Задача 1.*** Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».

*Решение.* Шестикратное бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха («шестерки»), равной 1/6, и вероятностью неудачи — 5/6. Искомую вероятность вычисляем по формуле $P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}053$.

***Задача 2***. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.

*Решение.* Искомая вероятность равна сумме вероятностей трех событий, состоящих в том, что герб не выпадет ни разу, либо один раз, либо два раза:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}344.$$

***Задача 3***. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

*Решение*. Событие состоит в том, что из 4 фирм-нарушителей будет выявлено три или четыре, т.е. $P(A)=P_4(3)+P_4(4)=C_4^3 0{,}9^3\cdot 0{,}1+C_4^4 0{,}9^4=0{,}9^3(0{,}4+0{,}9)=0{,}9477$.

***Задача 4.*** Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадений герба).

*Решение.* Возможными значениями для числа успехов в трех рассматриваемых испытаниях являются m = 0, 1, 2 или 3. Пусть $A_m$ - событие, состоящее в том, что при трех подбрасываниях монеты герб появляется m раз. По формуле Бернулли легко найти вероятности событий $A_m$ (см. таблицу):

| m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P_n(m)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Из этой таблицы видно, что наиболее вероятными значениями являются числа 1 и 2 (их вероятности равны 3/8). Этот же результат можно получить и из теоремы 2. Действительно, n=3, p=1/2, q=1/2. Тогда

$3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\le m^*\le 3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, т.е. $1\le m^*\le 2$.

***Задача 5.*** В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.

*Решение.* Имеем n=10, p=0,1, q=0,9. Неравенство для наиболее вероятного числа успехов принимает вид:

$25\cdot 0{,}1-0{,}9\le m^*\le 25\cdot 0{,}1+0{,}1$ или $1{,}6\le m^*\le 2{,}6$.

У этого неравенства только одно целое решение, а именно, $m^*=2$.