Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 1.

$$\boxed{x^2 - 4x - 5 > 0}$$

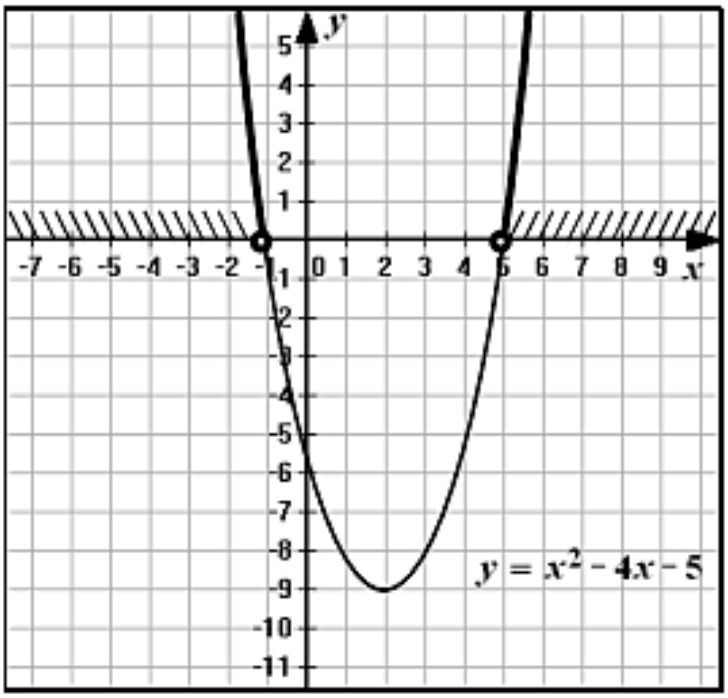
1. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x - 5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам:

   $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \qquad y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 \qquad (2; -9)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $x^2 - 4x - 5 = 0$

   $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow 2$ корня

   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = -1 \qquad (-1; 0)$

   $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \qquad (5; 0)$
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (> 0), ординаты которых положительны (т. е. выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Записываем полученные промежутки: $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.
7. Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 2.

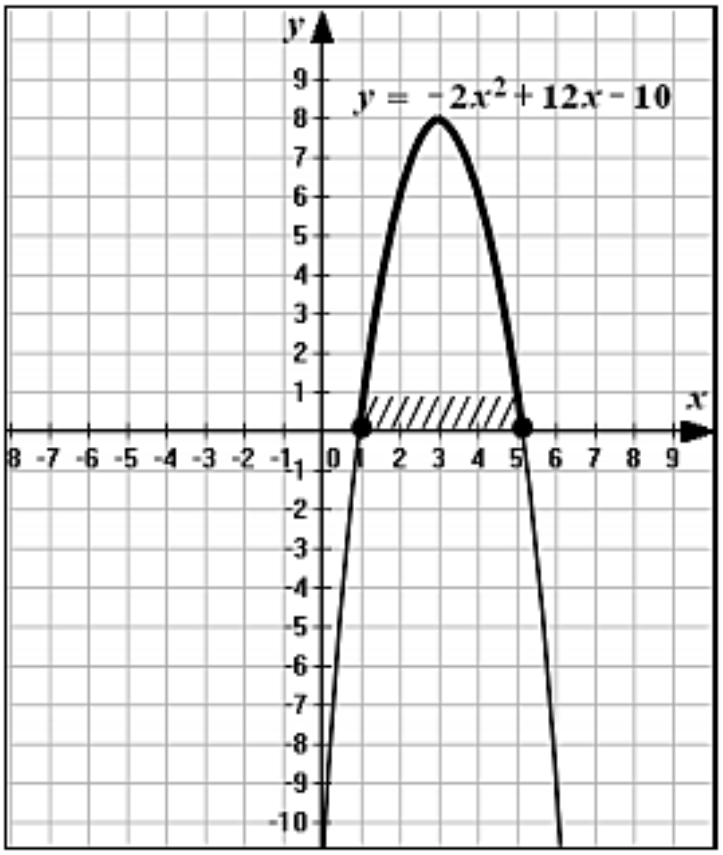
$$\boxed{-2x^2+12x-10\geq 0}$$

1. Рассмотрим функцию $y=-2x^2+12x-10$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a=-2>0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам:
   $x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\cdot(-2)}=3;\qquad y_в=-2\cdot 3^2+12\cdot 3-10=8\qquad (3;8)$
3. Находим нули функции $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$ (если они есть), решая уравнение:
   $-2x^2+12x-10=0\ \ |:(-2)$

   $x^2-6x+5=0$

   $D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16>0\Rightarrow 2$ корня

   $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{6-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6-4}{2}=1;\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{6+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6+4}{2}=5\qquad (1;0)$ и $(5;0)$
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≥ 0), ординаты которых неотрицательны (т. е. не ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Записываем полученный промежуток: $x\in[1;5]$.
7. Ответ: $[1;5]$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

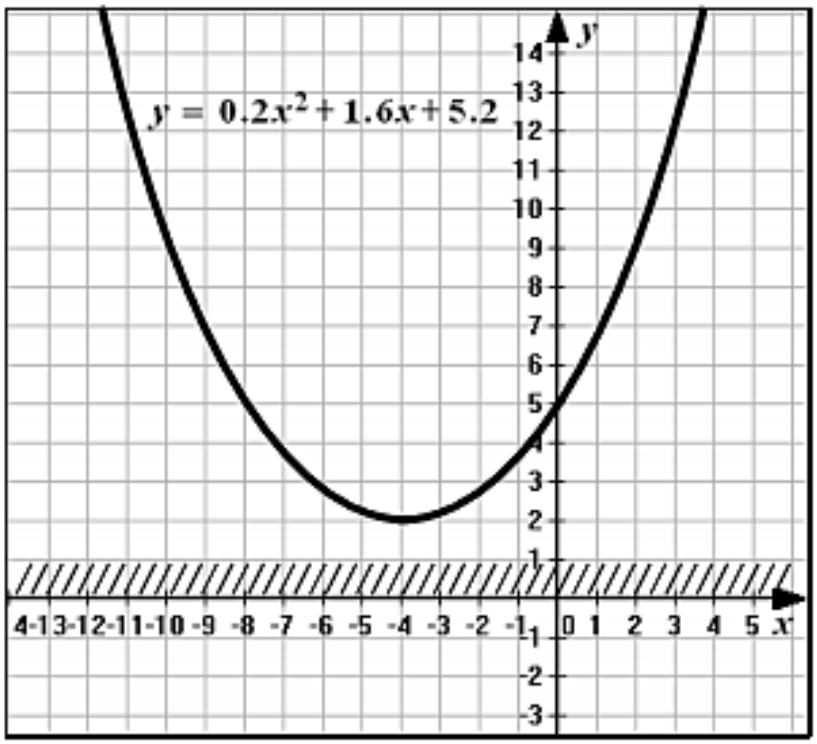
Пример 3.

$$\boxed{0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2>0}$$

1. Рассмотрим функцию $y=0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a=0{,}2>0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам: $x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{1{,}6}{2\cdot 0{,}2}=-4$ $\quad y_в=0{,}2(-4)^2+1{,}6\cdot(-4)+5{,}2=3{,}2-6{,}4+5{,}2=2$ $\quad (-4; 2)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2=0 \;\big|:0{,}2$

   $x^2+8x+26=0$

   $D=b^2-4ac=8^2-4\cdot 1\cdot 26=64-104=-40<0\Rightarrow$ нет точек пересечения с осью Ox.
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (>0), ординаты которых положительны (т. е. выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Все точки параболы удовлетворяют этому условию.
7. Записываем полученный промежуток: $x\in(-\infty; +\infty)$.
8. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 4.

$$\boxed{-0{,}5x^2 - x - 0{,}5 \geq 0}$$

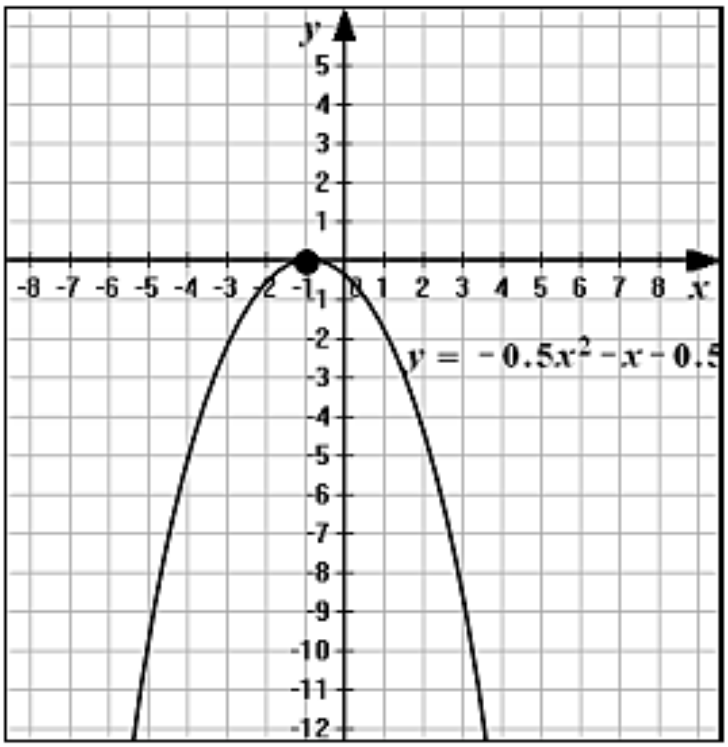
1. Рассмотрим функцию $y = -0{,}5x^2 - x - 0{,}5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -0{,}5 < 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot(-0.5)} = -1$; $y_в = -0.5\cdot(-1)^2 - (-1) - 0.5 = 0$ $(-1; 0)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $-0.5x^2 - x - 0.5 = 0 \quad | \times(-2)$

   $x^2 + 2x + 1 = 0$

   $(x+1)^2 = 0$

   $x + 1 = 0$

   $x = -1$ $(-1; 0)$
4. Вершина параболы совпадает с единственным нулем функции.
5. Строим схематично график:



6. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≥ 0), ординаты которых неотрицательны (т. е. не ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
7. Такая точка – единственная: $x \in \{-1\}$.
8. Ответ: $\{-1\}$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 5.

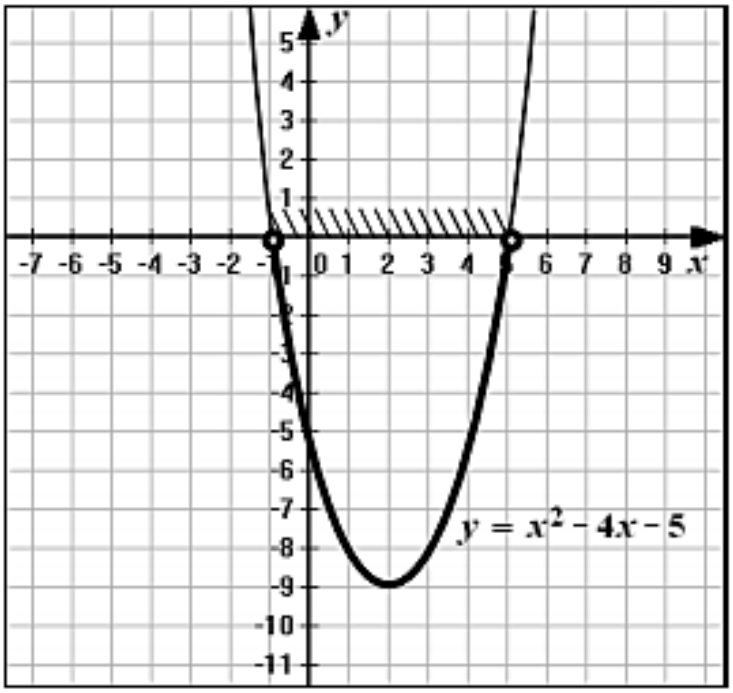
$$\boxed{x^2 - 4x - 5 < 0}$$

1. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x - 5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам:
   $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \qquad y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9 \qquad (2; -9)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $x^2 - 4x - 5 = 0$

   $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow 2$ корня

   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = -1 \qquad (-1; 0)$

   $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \qquad (5; 0)$
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (< 0), ординаты которых отрицательны (т. е. ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Записываем полученный промежуток: $x \in (-1; 5)$.
7. Ответ: $(-1; 5)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 6.

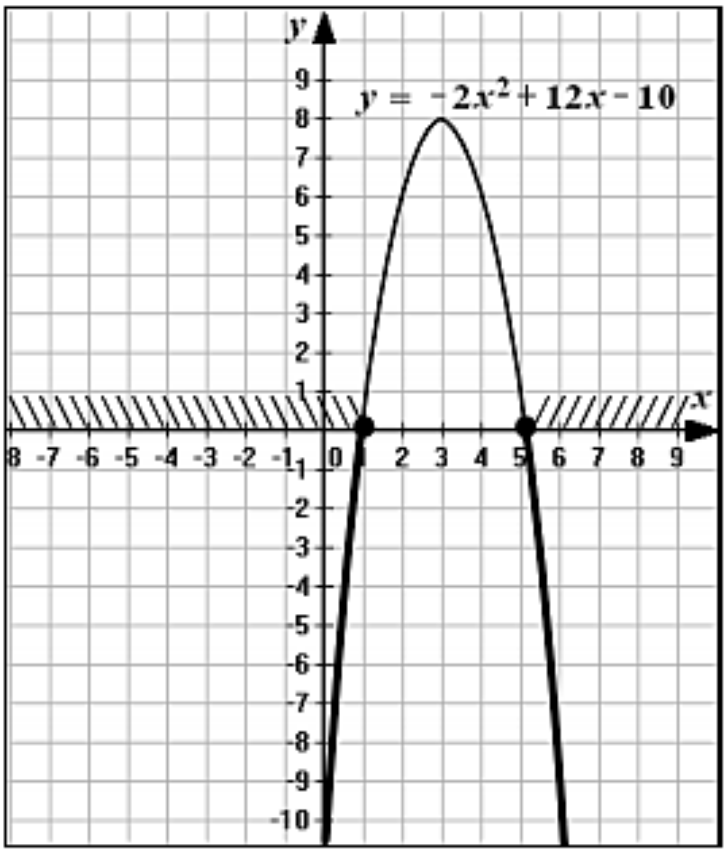
$$\boxed{-2x^2+12x-10\le 0}$$

1. Рассмотрим функцию $y=-2x^2+12x-10$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a=-2>0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам:
   $x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\cdot(-2)}=3;\qquad y_в=-2\cdot 3^2+12\cdot 3-10=8\qquad (3;8)$
3. Находим нули функции $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$ (если они есть), решая уравнение:
   $-2x^2+12x-10=0\ \ |:(-2)$

   $x^2-6x+5=0$

   $D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16>0\Rightarrow 2$ корня

   $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{6-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6-4}{2}=1;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{6+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6+4}{2}=5\qquad (1;0)\quad (5;0)$
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≤ 0), ординаты которых неположительны (т. е. не выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Записываем полученные промежутки: $x\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.
7. Ответ: $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

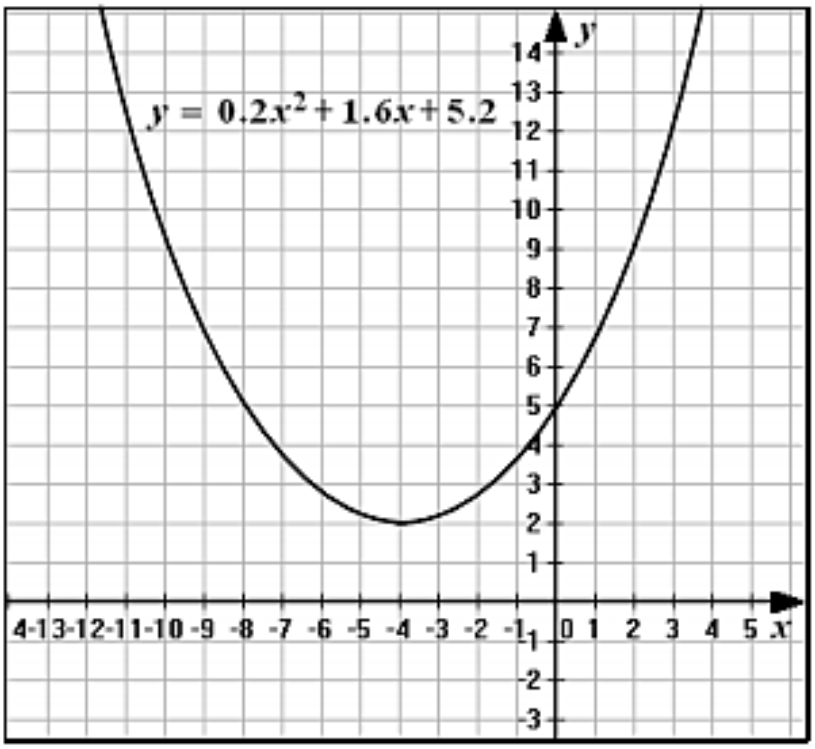
Пример 7.

$$\boxed{0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2<0}$$

1. Рассмотрим функцию $y=0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a=0{,}2>0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам: $x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{1{,}6}{2\cdot 0{,}2}=-4$ $\quad y_в=0{,}2(-4)^2+1{,}6\cdot(-4)+5{,}2=3{,}2-6{,}4+5{,}2=2$ $\quad (-4;\ 2)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $0{,}2x^2+1{,}6x+5{,}2=0 \ \big|:0{,}2$

   $x^2+8x+26=0$

   $D=b^2-4ac=8^2-4\cdot1\cdot26=64-104=-40<0\Rightarrow$ нет точек пересечения с осью Ox.
4. Строим схематично график:



5. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (<0), ординаты которых отрицательны (т. е. ниже оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
6. Ни одна точка параболы не удовлетворяет этому условию.
7. Записываем полученный промежуток: $x\in\varnothing$.
8. Ответ: нет решений.

Решение квадратных неравенств графическим способом.

Пример 8.

$$\boxed{-0{,}5x^2 - x - 0{,}5 \le 0}$$

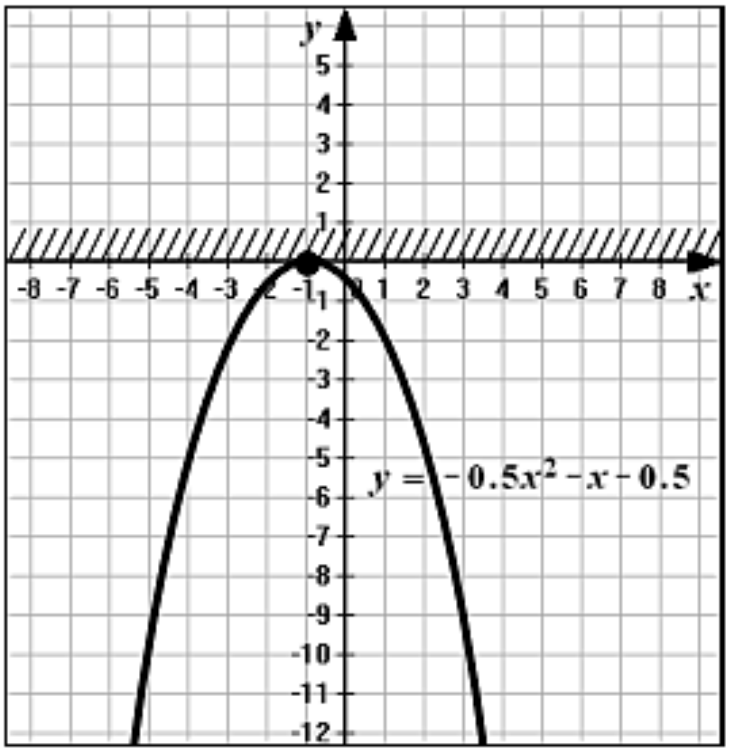
1. Рассмотрим функцию $y = -0{,}5x^2 - x - 0{,}5$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вниз, т. к. $a = -0{,}5 < 0$.
2. Находим координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ по формулам: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot(-0.5)} = -1$; $y_в = -0.5\cdot(-1)^2 - (-1) - 0.5 = 0$ $(-1; 0)$
3. Находим нули функции $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ (если они есть), решая уравнение: $-0.5x^2 - x - 0.5 = 0 \quad | \times(-2)$

   $x^2 + 2x + 1 = 0$

   $(x+1)^2 = 0$

   $x + 1 = 0$

   $x = -1$ $(-1; 0)$
4. Вершина параболы совпадает с единственным нулем функции.
5. Строим схематично график:



6. На графике находим точки, соответствующие указанному неравенству (≤ 0), ординаты которых неположительны (т. е. не выше оси Ox), определяем, при каких значениях x получаются эти точки.
7. Все точки параболы удовлетворяют этому условию.
8. Записываем полученный промежуток: $x \in (-\infty; +\infty)$.
9. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.