Решение

муниципального этапа Республиканской ученической олимпиады по математике

26.11.2016

6 класс

1. Что больше: 15% от числа 240 или число, 75% которого равны 27.

Решение.

1) Найдем 15% от числа 240: $\frac{240\cdot 15}{100}=36$;

2) Найдем число, 75% которого равны 27: $\frac{27\cdot 100}{75}=36$.

Ответ: числа равны.

2. Чтобы пронумеровать страницы научной работы потребовалось 3389 цифр. Сколько страниц в этой работе?

Решение. Одной цифрой пронумеровано 9 страниц, двумя цифрами пронумеровано 90 страниц, тремя цифрами пронумеровано 900 страниц, всего цифр $9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889$. Остается еще 500 цифр, которые использованы для четырехцифровых номеров страниц. Таких страниц $500:4=125$. Значит, всего страниц $9+90+900+125=1124$.

Ответ: 1124 страницы.

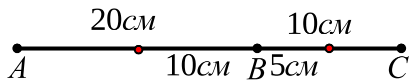
3. Два поезда двигались навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 50 км/ч, а другой – со скоростью 70 км/ч. Пассажир второго поезда заметил, что первый поезд прошёл мимо него за 6 секунд. Какова длина первого поезда?

Решение. Можно считать, что пассажир стоит на месте, а второй поезд проезжает мимо него со скоростью: $50+70=120$(км/ч). Так как поезд едет шесть секунд или $\frac{1}{600}$ часа, то расстояние которое он проедет за это время или его длина равна: $120\cdot\frac{1}{600}=\frac{1}{5}$(км)$=200$ метров.

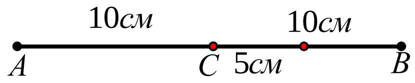
Ответ: 200 метров.

4. На прямой отметили точки A, B и C так, что AB = 20 см, BC = 10 см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.

Решение. Возможны два случая взаимного расположения точек A, B и C.

1) 

расстояние между серединами отрезков AB и BC равно 15см;

2) 

расстояние между серединами отрезков AB и BC равно 5см, так как точка C – середина отрезка AB.

Ответ: 15см или 5см.

5. Можно ли натуральные числа 1, 2, …, 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел этой группы?

Решение. Если бы это было возможно, сумма чисел в каждой группе была бы четной (равнялась бы удвоенному наибольшему числу). Тогда, поскольку сумма всех чисел равна сумме этих полученных четных результатов, она четная. С другой стороны, $1+2+...+21$ - нечетное число, поскольку в сумму входит нечетное количество нечетных чисел.

Ответ: нельзя.

Решение

муниципального этапа Республиканской ученической олимпиады по математике

26.11.2016

7 класс

1. Найдите сумму всех решений уравнения $(x+5)(|x|-7)=0$.

Решение. Произведение равно 0, если равен 0 хотя бы один из множителей, поэтому либо $x+5=0$, либо $|x|-7=0$. Значит,

$x=-5$, $x=7$ или $x=-7$.

Ответ: -5.

2. Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-ный раствор этой соли?

Решение. Посчитаем, сколько соли содержится в 600 г жидкости:

$$\frac{600}{100}\cdot 40=240 \text{ (г)}.$$

Теперь установим, сколько будет 12%-ной жидкости:

$$\frac{240}{12}\cdot 100=2000 \text{ (г)}.$$

Отсюда, легко считается количество добавленной воды:

$$2000-600=1400 \text{ (г)}.$$

Ответ: 1400 г.

3. На уборке снега работают две машины. Одна из них может убрать всю улицу за 1 час, а другая - за 45 минут. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 минут, после чего первая машина сломалась. Сколько надо времени, чтобы вторая машина закончила работу?

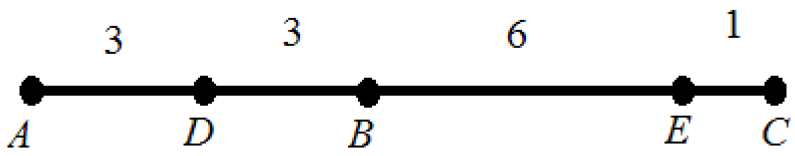
Решение. Исходя из условия задачи, первая машина убирает улицу за час, а вторая – за $\frac{3}{4}$ часа. Тогда, убирая улицу вместе $\frac{1}{3}$ часа, они убрали $\frac{1}{3}\cdot\left(1+1:\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{9}$ улицы.

Поэтому второй машине осталось убирать $\frac{2}{9}$ улицы. Она потратит на это $\frac{2}{9}:\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$ часа или 10 минут.

Ответ: 10 минут.

4. Можно ли на прямой отметить точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равны: *AB* = 6, *BC* = 7, *CD* = 10, *DE* = 9, *AE* = 12? Если да — приведите пример, если нет — объясните, почему нельзя.

Решение. Можно (см. рисунок).



5. На столе лежит куча из 2016 камней. Из нее выбрасывают один камень и делят кучу на две (не обязательно равные) части. Затем из любой кучи, содержащей более двух камней, снова выбрасывают один камень и делят ее на две части и т.д. Можно ли через несколько ходов добиться того, чтобы во всех кучах, лежащих на столе, было ровно по 3 камня?

Решение. После каждого хода количество куч на столе увеличивается на одну. Значит, после $n-1$-го хода получается *n* куч. Если все они содержат по три камня, то общее количество камней в них 3*n*. Вместе с выброшенными камнями (выброшенных всего $n-1$) они составляют исходное количество 2016. Значит, $2016=n-1+3n$ или $2016=4n-1$; $4n=2017$. Поскольку n не является целым, добиться предложенного в условии нельзя.

Ответ: нельзя.

Решение

муниципального этапа Республиканской ученической олимпиады по математике

26.11.2016

8 класс

1. Известно, что 20% одного числа равны $\frac{1}{3}$ второго. Найдите произведение этих чисел, если их сумма равна 24.

Решение. Пусть неизвестные числа равны x и y. 20% первого числа равны $0{,}2x$, а $\frac{1}{3}$ второго – равна $\frac{1}{3}y$. По условию задачи составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} x+y=24, \\ 0{,}2x=\frac{1}{3}y; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=24, \\ x=\frac{5}{3}y; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5}{3}y+y=24, \\ x=\frac{5}{3}y; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{8}{3}y=24, \\ x=\frac{5}{3}y; \end{cases}$ $\begin{cases} y=9, \\ x=15. \end{cases}$

Произведение чисел равно $9\cdot 15=135$.

Ответ: 135.

2. Найдите все корни уравнения $(x^2-1)^2+|x-1|=0$.

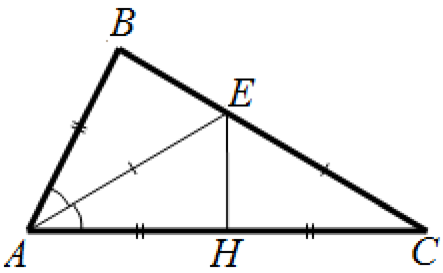
Решение. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю, то есть уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2-1)^2=0, \\ |x-1|=0; \end{cases} \begin{cases} x^2-1=0, \\ x-1=0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x+1)=0, \\ x=1; \end{cases} \begin{cases} x=1 \textit{ или } x=-1, \\ x=1; \end{cases} x=1.$$

Ответ: 1.

3. *AE* – биссектриса угла *A* треугольника *ABC*. Известно, что *AE*=*EC*. Найдите углы треугольника *ABC*, если *AC*=2*AB*.

Решение. Проведем $EH \perp AC$. По условию $AE=EC$, значит, ΔAEC


A
B
C
E
H

равнобедренный, и $AH = \frac{1}{2}AC$.

По условию $AC=2AB$, значит, $AB = \frac{1}{2}AC$.

Итак, $AH = AB = HC$. AE – биссектриса угла A, поэтому $\angle BAE = \angle HAE$. $\Delta BAE = \Delta HAE$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $\angle ABE = \angle AHE = 90°$. Следовательно, ΔABC прямоугольный, с прямым углом B, в котором катет AB равен половине гипотенузы AC, значит, $\angle ACB = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

Ответ: $30°; 60°; 90°$.

4. Первая слева цифра шестизначного числа равна 1. Если ее поставить на последнее место, то получится число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

Решение. Если шестизначное число начиналось цифрой 1, его можно представить в виде $100000+a$, где a – некоторое пятизначное число. После перестановки 1 на последнее место, число примет вид $10a+1$. Поскольку полученное число в 3 раза больше исходного, получаем уравнение: $10a+1=3\cdot(100000+a)$. Отсюда $10a+1=300000+3a$; $7a=299999$; $a=42857$. Значит, исходное число равно 142857.

Ответ: 142857.

5. Целые числа m и n такие, что $m^2+9mn+n^2$ делится на 11. Докажите, что выражение m^2-n^2 делится на 11.

Решение. $m^2+9mn+n^2=(m-n)^2+11mn$.

Так как $m^2+9mn+n^2$ делится на 11, то и $(m-n)^2+11mn$ делится на 11. Тогда на 11 делится и $(m-n)^2$. Так как 11 простое число, то $m-n$ тоже делится на 11. Следовательно, $(m-n)(m+n)$ тоже делится на 11. Значит, m^2-n^2 делится на 11.

Решение

муниципального этапа Республиканской ученической

олимпиады по математике

26.11.16

9 класс

1. Дмитрий прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 30% и еще 4 страницы, во второй день – 60% остатка и еще 14 страниц, в третий день – 85% нового остатка и последние 9 страниц. Сколько страниц было в книге?

Решение. 9 страниц составляют 100%–85%=15% последнего остатка, этот остаток равен $9:15\cdot 100=60$ страниц. Во второй день Дмитрий прочитал 60% остатка и еще 14 страниц и осталось 60 страниц на третий день, значит, 74 страницы – это 40% страниц, оставшихся непрочитанными после первого дня. Поэтому, весь остаток после первого дня чтения равен $74:40\cdot 100=185$ страницы и еще 4 страницы.

100% – 30% = 70% - остаток после первого дня чтения или 189 страниц.

Поэтому в книге $189:70\cdot 100=270$ страниц.

Ответ: 270.

2. Найти сумму всех корней уравнения $x^2+3|x-1|-7=0$.

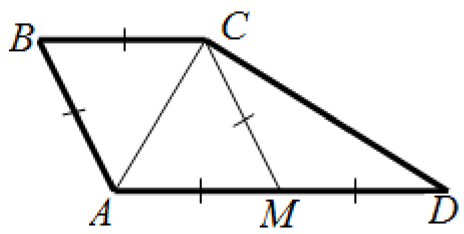
Решение. При $x\geq 1$ получаем $x^2+3(x-1)-7=0$ или $x^2+3x-10=0$. Корни этого уравнения 2 и -5. Условию $x\geq 1$ удовлетворяет только 2. При $x<1$ получаем $x^2-3(x-1)-7=0$ или $x^2-3x-4=0$. Корни этого уравнения -1 и 4. Условию $x<1$ удовлетворяет только -1. Сумма найденных корней равна 1.

Ответ: 1.

3. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, *AB*=*BC*=$\frac{1}{2}$*AD*. $\angle ADC=19^\circ$. Найдите $\angle BAD$.

Решение. *ABCD* – трапеция с основаниями *AD* и *BC*, поэтому

$$\angle BCD+\angle ADC=180^\circ.$$



$\angle ADC = 19°$, поэтому $\angle BCD = 180° - \angle ADC = 161°$.

Проведем $CM \| AB$. $ABCM$ - параллелограмм у которого $AB=BC$, то есть $ABCM$ – ромб.

По свойству диагоналей ромба $\angle ACB = \angle ACM$. В треугольнике CMD стороны CM и MD равны, поэтому $\angle MCD = \angle MDC = 19°$, тогда $\angle CMD = 180° - 2 \cdot 19° = 142°$.

$\angle BAD = \angle CMD = 142°$, как соответственные при параллельных прямых CM и AB и секущей AM.

Ответ: $142°$.

4. Найти все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное равно 105.

Решение. Если наибольший общий делитель двух чисел равен 5, эти числа a и b можно записать в виде: $a = 5n$ и $b = 5k$, где n и k – взаимно простые натуральные числа. Поскольку наименьшее общее кратное равно 105, получаем: $105 = 5nk$ или $kn = 21$. Возможные значения для n и k, удовлетворяющих условию: 1 и 21; 3 и 7. Тогда искомые пары чисел: 5 и 105; 15 и 35.

Ответ: 5 и 105; 15 и 35.

5. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений оказалось полностью свободными. В следующий раз сидели 10 человек, а свободных сидений осталось 6. Сколько сидений в автобусе?

Решение. 13 человек могут занять минимум 7 сидений (если 12 из них займут 6 двухместных и 13-й – сядет на любое из оставшихся). Так как при этом 9 сидений остались свободными, то всего в автобусе не менее 7 + 9 = 16 сидений.

10 человек могут занять максимум 10 сидений (занимая отдельное сидение для каждого); при этом 6 сидений остались свободными. Значит, всего не более 10 + 6 = 16 сидений.

То есть в автобусе ровно 16 сидений.

***Ответ*:** 16.

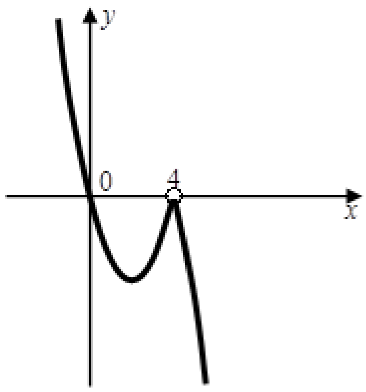
Решение

муниципального этапа Республиканской ученической олимпиады по математике 26.11.2016

10 класс

1. Постройте график функции $y=\frac{|x-4|}{4-x}\left(x^2-4x\right)$.

Решение



$y=\frac{|x-4|}{4-x}\left(x^2-4x\right)$.

$D(y):(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

Если $x<4$, то $y=\frac{4-x}{4-x}\left(x^2-4x\right)$, $y=x^2-4x$;

если $x>4$, то $y=\frac{x-4}{4-x}\left(x^2-4x\right)$, $y=-x^2+4x$.

2. Найти два натуральных числа, если их сумма равна 85, а наименьшее общее кратное равно 102.

Решение. Пусть искомые числа – это a и b. Тогда их можно представить в виде $a=dn$ и $b=dk$, где d – их наибольший общий делитель; n и k – взаимно простые натуральные числа. По условию получаем систему двух уравнений: $\begin{cases} d(n+k)=85, \\ dnk=102. \end{cases}$ Из нее следует, что 85 и 102 делятся на d. Поскольку $85=5\cdot17$, а $102=2\cdot3\cdot17$, получаем два возможных варианта: $d=1$ или $d=17$.

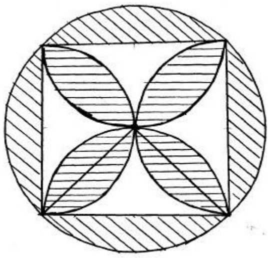
Если $d=1$, то полученная система $\begin{cases} n+k=85, \\ nk=102 \end{cases}$ не имеет решений в натуральных числах.

Если $d=17$, то получаем систему $\begin{cases} n+k=5, \\ nk=6. \end{cases}$ Решая ее, получаем, что n и k равны 2 и 3. Тогда искомые числа – 34 и 51.

Ответ: 34 и 51.

3. Квадрат вписан в круг. На сторонах квадрата, как на диаметрах построены полукруги. Четыре попарных пересечения этих кругов образу ют фигуру «цветок». Докажите, что общая площадь «цветка» равна площади части описанного около квадрата круга, которая лежит вне квадрата.

Решение.



Пусть сторона квадрата равна $2a$, тогда радиус описанного круга равен $\frac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$, площадь круга $\pi R^2=\pi a^2\cdot 2=2\pi a^2$.

Площадь квадрата $4a^2$, площадь части круга, которая лежит вне квадра равна $2\pi a^2-4a^2=2a^2(\pi-2)$.

Площадь одного «лепестка цветка» равна $S_{полукруга}-S_{треугольника}=\frac{\pi a^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2a^2=$

$\frac{\pi a^2-2a^2}{2}==\frac{a^2(\pi-2)}{2}$,

площадь всего «цветка»: $S=4\cdot\frac{a^2(\pi-2)}{2}=2a^2(\pi-2)$.

Итак, площади «цветка» и части описанного круга, лежащей вне квадрата, равны.

4. $f(x)$ и $g(x)$ - квадратные трехчлены, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что $f(1)+f(7)+f(49)=g(1)+g(7)+g(49)$. При каких значениях x выполняется равенство $f(x)=g(x)$?

Решение.

Пусть $f(x)=x^2+b_1x+c_1$,

$g(x)=x^2+b_2x+c_2$.

Тогда $f(1)+f(7)+f(49)=1+b_1+c_1+49+7b_1+c_1+2401+49b_1+c_1$,

$f(1)+f(7)+f(49)=57b_1+3c_1+2451$;

$g(1)+g(7)+g(49)=1+b_2+c_2+49+7b_2+c_2+2401+49b_2+c_2$,

$g(1)+g(7)+g(49)=57b_2+3c_2+2451$.

По условию $x^2+b_1x+c_1=x^2+b_2x+c_2$, поэтому $x(b_1-b_2)=c_2-c_1$.

т.е. $57b_1+3c_1+2451=57b_2+3c_2+2451$,

$57(b_1-b_2)=3(c_2-c_1)$,

$19(b_1-b_2)=c_2-c_1$.

Так как $x(b_1-b_2)=c_2-c_1$ и $19(b_1-b_2)=c_2-c_1$, то $x=19$.

Ответ: При $x=19$ трехчлены равны.

5. В шахматном турнире каждый шахматист сыграл с каждым по одному разу и каждый шахматист все партии, кроме одной, завершил вничью. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было зафиксировано 264 ничьи?

Решение. Пусть в турнире участвовало *n* шахматистов. Тогда каждый из них сыграл ровно *n* – 1 партию. Поскольку все партии кроме одной каждый шахматист завершил вничью, то каждый из них сделал *n* – 2 ничьи. Тогда общее число ничейных партий равно $\frac{n(n-2)}{2}$, так как в каждой партии участвуют два шахматиста. С другой стороны, общее число ничьих равно 264. Таким образом, имеем уравнение $\frac{n(n-2)}{2}=264$, или $n^2-2n-528=0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим два значения: $n=24,-22$. Последнее значение не подходит, так как *n* – натуральное.

Ответ: 24.

Решение

муниципального этапа Республиканской ученической олимпиады по математике

26.11.2017

11 класс

1. Найдите все значения $x \in [-90°; 90°]$, которые удовлетворяют уравнению $2\cos 10° + \sin 100° + \sin 1000° = 2\sin x$.

Решение. Поскольку $\cos 10° = \sin 80°$, $\sin 100° = \sin 80°$,

$\sin 1000° = \sin(360° \cdot 3 - 80°) = \sin(-80°) = -\sin 80°$, уравнение примет вид

$2\sin 80° + \sin 80° - \sin 80° = 2\sin x$, $\sin 80° = \sin x$.

Отсюда, учитывая, что $x \in [-90°; 90°]$, получаем, что $x = 80°$.

Ответ: $x = 80°$.

2. Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x^2 - 6x + 18} \cdot \sqrt{y^2 + 14y + 50} \le 3$.

Решение

Преобразуем неравенство

$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 9} \cdot \sqrt{y^2 + 14y + 49 + 1} \le 3$, $\sqrt{(x-3)^2 + 9} \cdot \sqrt{(y+7)^2 + 1} \le 3$,

Поскольку $(x-3)^2 + 9 \ge 9$, а $(y+7)^2 + 1 \ge 1$,

то $\sqrt{(x-3)^2 + 9} \cdot \sqrt{(y+7)^2 + 1} \ge 3$.

Потому равенство может выполняться только при условии

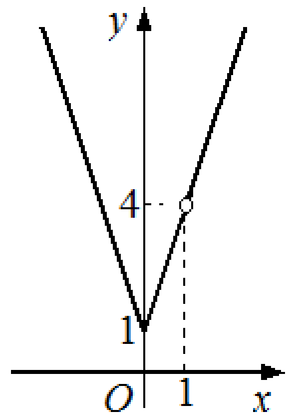
$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ y + 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -7. \end{cases}$$

Ответ: $(3;-7)$.

3. Постройте график функции $y=3\left|f(f(x))\right|+1$, где $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$f(f(x))=\frac{f(x)+2}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x+2}{x-1}+2}{\dfrac{x+2}{x-1}-1}=x .$$



Найдём область определения функции $f(f(x))$:

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ f(x)\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \dfrac{x+2}{x-1}\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \ x\neq 1.$$

.

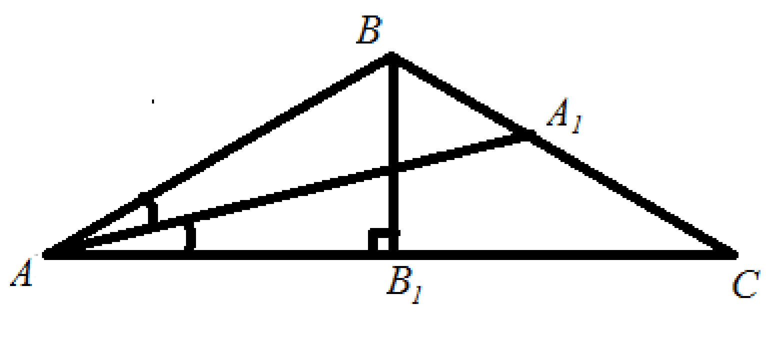
Таким образом, функция $y=3\cdot\left|f(f(x))\right|+1$ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y=|3x|+1, \\ x\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \ y=\begin{cases} 1-3x, & x<0, \\ 3x+1, & x\geq 0, \quad x\neq 1. \end{cases}$$

График функции $y=3\cdot\left|f(f(x))\right|+1$ изображён на рисунке.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Найти углы треугольника ABC, если $AA_1=2BB_1$.

Решение. В данном треугольнике ABC обозначим $AB=a$, $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Тогда $BB_1\perp AC$, $BB_1=a\sin\alpha$, $AB_1=a\cos\alpha$,



$AC=2a\cos\alpha$.

По теореме синусов из треугольника AA_1C

$$\frac{AA_1}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle A_1}$$ или

$$\frac{AA_1}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\frac{3\alpha}{2}},\qquad \frac{AA_1}{\sin\alpha}=\frac{2a\cos\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}},\qquad AA_1=\frac{2a\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Поскольку $AA_1=2BB_1$, запишем: $\dfrac{2a\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}=2a\sin\alpha$.

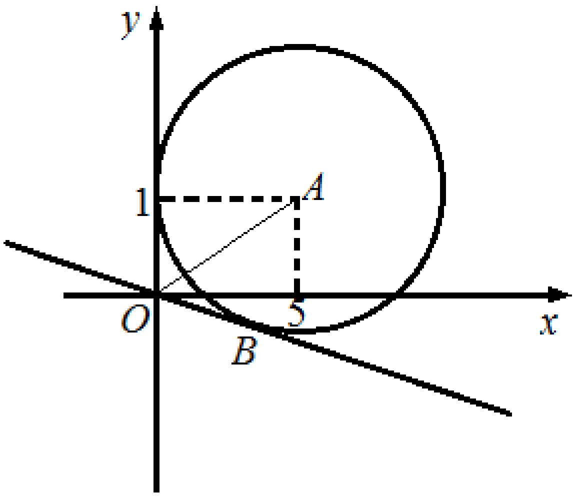
Так как $\sin\alpha\neq 0$, получаем: $\sin\dfrac{3\alpha}{2}=\cos\alpha$ или $\sin\dfrac{3\alpha}{2}=\sin(90^\circ-\alpha)$.

Это означает, что $\dfrac{3\alpha}{2}=90^\circ-\alpha$ или $\dfrac{3\alpha}{2}=180^\circ-(90^\circ-\alpha)$. То есть, $\alpha=36^\circ$ или $\alpha=180^\circ$. Условию удовлетворяет только первое значение. Следовательно, углы треугольника равны 36°, 36° и 108°.

Ответ: 36°, 36° и 108°.

5. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{y}{x}$, если известно, что $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.

Решение. Пусть $\dfrac{y}{x}=a$, то есть $y=ax$ при $x\neq 0$. Тогда для решения задачи нужно найти наименьшее значение a, при котором система $\begin{cases} y=ax, \\ x^2-10x+y^2-2y+1=0 \end{cases}$ имеет решения. Преобразуем второе уравнение системы: $(x-5)^2+(y-1)^2=25$. На координатной плоскости оно задает окружность с центром в точке $A(5;1)$ и радиусом 5. Первое уравнение задает семейство невертикальных прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через начало координат O.



Наименьшим является то значение a, при котором прямая из этого семейства касается окружности (см. рисунок). Пусть $\angle XOB = \alpha$, а $\angle AOX = \beta$. Тогда $a = -tg\alpha$, $\angle AOB = \angle AOY$ и $\alpha = \angle AOY - \beta$.

Поскольку $tg\angle AOY = 5$, а $tg\beta = \frac{1}{5}$, получаем, что

$$tg\alpha = tg\left(\angle AOY - \beta\right) = \frac{tg\angle AOY - tg\beta}{1 + tg\angle AOY \cdot tg\beta} = \frac{5 - \frac{1}{5}}{1 + 5 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{12}{5}$$

. Значит, $a = -\frac{12}{5}$.

Ответ: $-\frac{12}{5}$.