МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ДОНЕЦКИЙ ИНСТИТУТ
ПОСЛЕДИПЛОМНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Донецкий национальный университет
Факультет математики и информационных технологий

СОГЛАСОВАНО
Донецкий институт последипломного педагогического образования
Протокол заседания Ученого совета
от __ _____ 20___ №_____

УТВЕРЖДЕНО
Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики
Приказ от 25 08 20 16 № 863

Программа эвристического факультатива по математике

ЭВРИСТИКИ В ГЕОМЕТРИИ

для 8 класса
(32 часа)

Авторы:
Скафа Е.И., доктор пед. наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета,
Гончарова И.В., канд. пед. наук, доц., доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета

ДОНЕЦК 2016

«Одобрено к использованию
в образовательных организациях»

Министерство образования и наук ДНР
Приказ от 25.08 2016 г. № 863

Рецензенты:

Горр Г.В., доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк;

Прач В.С., кандидат педагогических наук, старший учитель Донецкого учебно-воспитательного комплекса № 16

Составители:

Скафа Е.И., доктор педагог.наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет,

Гончарова И.В., кандидат педагог. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет

Основная цель факультатива – привить учащимся 8 класса интерес к изучению геометрии, научить их видеть красоту, развивать мышление и интуицию, формировать умения высказывать и обосновывать гипотезы, проводить аналогии, сопоставлять и противопоставлять факты, выполнять анализ условия задания и находить синтетические приемы рассуждений, то есть сформировать у обучающихся некоторые эвристические приемы. Занятия факультативного курса строятся в виде системы уроков по изучению разнообразных эвристических приемов на основе задачного материала курса геометрии 8 класса.

ЭКСПЕРТНЫЙ ЛИСТОК

Авторы:

Скафа Е.И., доктор пед. наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета;

Гончарова И.В., канд. пед. наук, доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета

Горр Г.В., доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк;

Прач В.С., кандидат педагогических наук, старший учитель Донецкого учебно-воспитательного комплекса № 16

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики
(протокол от "12" 11 2015 г. № 4)
Декан факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета В.Н.Андриенко

Согласовано с Научно-методическим советом Донецкого национального университета
Председатель Научно-методического совета ДонНУ, проректор по научно-методической и учебной работе ДонНУ Е.И.Скафа

Научно-методическая экспертиза ИППО:

_____

_____

_____

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Сегодня общество нуждается во всесторонне развитых личностях. Математические знания, представления о роли математики в современном мире стали необходимыми компонентами общей культуры человека и немаловажную роль в ее развитии играют факультативные занятия по математике.

Основная задача эвристического факультатива «Эвристики в геометрии» для учащихся 7-8 классов – привить интерес к изучению предмета, научить их видеть красоту, эстетику математики, развить их мышление и интуицию, научить высказывать и обосновывать гипотезы.

Ничто так не развивает мышление школьников, как решение эвристических задач. Именно они развивают интуицию, дают ученикам возможность проявить себя, дают им так называемое «чувство успеха», что и способствует их дальнейшей заинтересованности в изучении математики.

Цель факультатива «Эвристики в геометрии» – познакомить учащихся с некоторыми эвристическими приемами поиска решения задач.

Задачи факультатива – формирование представления обучаемых об использовании эвристических приемов в процессе поиска решения задачи, таких как: анализ и синтез; перебор, выбор наилучшего варианта; использование симметрии; метод «проб и ошибок»; «умение видеть и наблюдать» и др. Этим и некоторым другим приемам поиска решения задач учащиеся обучаются, осваивая такие темы как «Геометрическое зрение», «Обман зрения. Софизмы. Контрпример», «Симметрия», «Перебор вариантов», «Моделирование».

Решение эвристических задач требует нестандартного подхода, понимания кроме математических зависимостей также прикладного смысла различных процессов и явлений окружающего мира.

Так, симметрия, например, наблюдается в природе, используется человеком при строительстве, при создании картин и скульптур, стихотворных и музыкальных форм. Таким образом, факультатив имеет важное прикладное значение: здесь приводятся многочисленные примеры проявления симметрии

в природе, изучаются симметрии плоских фигур.

Игра-головоломка «Танграм» эмоционально привлекательна для учащихся, помогает развитию у них в игровой форме, как пространственного воображения, элементов логического мышления, так и таких качеств как усидчивость, сосредоточенность, внимание.

Разбор же софизмов, прежде всего, развивает логическое мышление. Обнаружить ошибку в софизме – значит осознать ее, а осознание ошибки предупреждает от ее повторения в других рассуждениях. Разбор софизмов развивает наблюдательность, вдумчивое и критическое отношение к изучаемому материалу, воспитывает у учащихся критичность мышления. Математические софизмы приучают тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей при решении задач. К тому же разбор софизмов увлекателен.

Основная методическая установка эвристического факультатива «Эвристики в геометрии» – организация и управление самостоятельной работой учащихся.

***Рекомендуемые методы обучения*:** эвристический и исследовательский методы.

***Рекомендуемые формы обучения*:** информация учителя и обсуждение ее с учащимися; эвристическая беседа; самостоятельная и групповая работа учащихся; практикум по решению задач; конкурс; зачет; самооценка и взаимооценка учащимися творческих работ.

Для каждой темы указано возможное распределение часов. По необходимости учитель может по своему желанию или согласно с тематическим планированием основного курса увеличить или уменьшить количество часов на ту или другую тему. Порядок изучения тем по усмотрению учителя может быть изменен.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Наименование разделов и тем	Количество часов			Формы контроля
		всего	теория	практика	
1.	Введение в факультатив	2	1	1	
2.	**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ** Эвристические правила при решении задач	2	1	1	
3.	**ОЧЕВИДНОЕ И НЕВЕРОЯТНОЕ** Геометрическое зрение	2	1	1	
4.	Обман зрения. Софизмы. Контрпример	2	1	1	
5.	**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООБРАЖЕНИЙ СИММЕТРИИ** Симметрия. Исследовательская работа. Опыты с зеркалами	2		2	
6.	Симметрия. Осевая и центральная симметрии	2	1	1	
7.	Симметрия. «Метод симметрии» в решении задач. Математический бой.	2	1	1	
8.	**ИСКУССТВО ПЕРЕБОРА** Перебор вариантов. Анализ и синтез при решении задач	2	1	1	
9.	Перебор вариантов. Геометрия танграма	2	1	1	
10.	**МОДЕЛИРОВАНИЕ** Метод математического моделирования. Решение задач с практическим содержанием	2	1	1	
11.	Модели многогранников. Формула Эйлера	2	1	1	
12.	Графическое моделирование. Решение задач с помощью графов	2	1	1	
13.	Графическое моделирование. Задачи на вычерчивание фигур одним росчерком	2	1	1	
14.	**ЭВРИСТИЧЕСКАЯ СОЛЯНКА** Практикум по решению эвристических задач	4		4	
15.	Зачет	1		1	
16.	Итоговое занятие	1		1	
	Всего	32	12	20	

ПРОГРАММА

эвристического факультатива по математике «Эвристики в геометрии»

№	Название раздела, темы	Содержание учебного материала	Кол-во часов	Планируемые результаты (требования к учебным достижениям учащихся)
1	2	3	4	5
1.	Введение в факультатив	Беседа о тематике факультатива и основных его понятиях. Диагностика творческого потенциала учащихся. Практикум.	2	– оценивать предложенные задания с точки зрения интереса, доступности, эвристичности
	ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ			
2.	Эвристические правила при решении задач	Открытие неравенства треугольника. Беседа о решении математических задач. Демонстрация на примере применения рекомендуемых советов и вопросов при решении задачи. Беседа об эвристике «постановка задачи». Рассмотрение задач с несформулированным вопросом, с неполным составом условия, с избыточным составом условия. Практикум.	2	– анализировать условие задачи; – составлять план решения задачи; – осуществлять анализ найденного решения; – выявлять существенные и несущественные свойства объекта, необходимые для решения задачи; – использовать перебор при решении задач; – применять эвристические правила на каждом этапе решения задачи; – формулировать отношение между неизвестными и данными; – выделять отсутствующие, избыточные, лишние данные; – конструировать задачи путем формулировка вопроса; – классифицировать не-

1	2	3	4	5
				корректно составленные задачи, задачи с недостаточными и лишними данными; – составлять задачи путем формулировка вопроса к набору определенных данных; – уточнять содержание некорректной задачи
	ОЧЕВИДНОЕ И НЕВЕРОЯТНОЕ			
3.	Геометрическое зрение	Беседа об эвристике «умение видеть и наблюдать». Геометрический тренинг (самостоятельная работа).	2	– оценивать правильность утверждения; – переключаться с одной закрепленной умственной операции на другую; – анализировать утверждение (изображение); – замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы; – по-разному интерпретировать тот же элемент геометрической фигуры
4.	Обман зрения. Софизмы. Контрпример	Рассмотрение неоднозначных рисунков. Обманы зрения. Примеры. Теория перспективы. Знакомство с софизмами. Беседа об эвристике «контрпример и подтверждающий пример». Практикум.	2	– анализировать утверждение (изображение); – оценивать правильность утверждения; – замечать различные особенности геометрических фигур; – приводить подтверждающий и опровергающий примеры –

1	2	3	4	5
	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООБРАЖЕНИЙ СИММЕТРИИ			
5.	Симметрия. Исследовательская работа. Опыты с зеркалами	Исследовательская работа.	2	– самостоятельно обобщать данные, полученные опытным путем; – интерпретировать результаты исследования с зеркалами; – проводить аналогию; – обобщать определенный метод рассуждения.
6.	Симметрия. Осевая и центральная симметрии	Беседа о симметрии. Осевая симметрия. Построение симметричных фигур. Самостоятельная работа «Построение симметричных фигур на миллиметровой бумаге».	2	– строить симметричные фигуры (относительно прямой, относительно точки); – использовать понятие осевой и центральной симметрии при решении задач
7.	Симметрия. «Метод симметрии» в решении задач. Математический бой	Игра-конкурс букв и слов. Освоение «метода симметрии» в решении задач. Практикум	2	– анализировать условие задачи при выборе вида симметрии; – переносить усвоенные приемы для решения аналогичных задач
	ИСКУССТВО ПЕРЕБОРА			
8.	Перебор вариантов. Анализ и синтез при решении задач.	Беседа об эвристике «перебор вариантов». Анализ и синтез при решении задач на построение. Практикум	2	– перебирать возможные варианты при решении задачи; – сокращать перебор вариантов решения задачи
9.	Перебор вариантов. Геометрия танграма	Знакомство с Танграмом. Практикум. Выполнение индивидуального задания	2	– использовать перебор вариантов при конструировании различных фигур; – восстанавливать вид фигуры.

1	2	3	4	5
	МОДЕЛИРОВАНИЕ			
10.	Метод математического моделирования. Решение задач с практическим содержанием	Беседа об эвристике «моделирование». Практикум	2	– применять метод математического моделирования при решении прикладных задач; – переформулировать условие задачи с естественного на математический (и наоборот); – осуществлять анализ и проверку найденного решения задачи
11.	Модели многогранников. Формула Эйлера	Изготовление моделей многогранников. Вывод формулы Эйлера. Практикум	2	– конструировать несложные модели многогранников; – выводить и применять формулу Эйлера
12.	Графическое моделирование. Решение задач с помощью графов	Беседа об эвристическом приеме «графическое моделирование» (или «использование графов»). Знакомство с основными понятиями теории графов. Решение задач с помощью графов. Практикум.	2	– переходить к равносильной задаче (переводить условие задачи на язык теории графов); – строить граф по условию задачи; – интерпретировать результат задачи по рисунку; – обобщать метод рассуждения
13.	Графическое моделирование. Задачи на вычерчивание фигур одним росчерком	Открытие важного свойства о вычерчивании фигур одним росчерком. Практикум	2	– вычерчивать несложные фигуры одним росчерком

1	2	3	4	5
	ЭВРИСТИЧЕСКАЯ СОЛЯНКА			
14.	Практикум по решению эвристических задач	Решение эвристических задач.	4	– анализировать условие задачи; – использовать прием перебора при решении эвристических задач; – формулировать отношение между неизвестными и данными; – вычленять недостающие и избыточные данные; – конструировать задачи путем формулировки вопроса; – оценивать правильность утверждения; – использовать перебор вариантов при конструировании различных фигур; – переходить к равносильной задаче (переводить условие задачи на язык теории графов); – обобщать метод рассуждения
15.	Зачет		1	
16.	Итоговое занятие.	Самооценка и взаимооценка составленных учащимися задач и творческих работ. Проведение конкурса	1	– осуществлять анализ, рефлексию, самооценку своей учебно-познавательной деятельности; – выступать устно и письменно о результатах своего исследования; – выступать с устным сообщением, задать вопрос, корректно вести учебный диалог

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Литература, рекомендованная для учителя

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад / И.Л.Бабинская. – М.: Физматлит, 1975.

2. Балк М.Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике: пособие для учителей / М.Б.Балк. – М.: Просвещение, 1956. – 248 с.

3. Германович П.Ю. Вопросы и задачи на соображение для 8-10 кл.: пособие для учителей / П.Ю.Германович. – Л.: Учпедгиз, 1957. – 150 с.

4. Гончарова І.В. Евристики в геометрії / І.В.Гончарова, О.І.Скафа. – Харків: Видавн.група "Основа", 2004. – 112 с.

5. Гусев В.А. Внеклассная работа по математике в 6-8 кл.: кн. для учителя / В.А.Гусев, А.И.Орлов, А.Л.Розенталь. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1984. – 286 с.

6. Жаров В.А. Вопросы и задачи по геометрии: пособие для учителей / В.А.Жаров, П.С.Марголите, З.А.Скопец. – М.: Просвещение, 1965.

7. Камаев П. Древняя китайская головоломка «Семь хитроумных фигур» / П.Камаев // Математика. – № 14. – 2001.

8. Карп А.П. Математика. 7 кл.: дидакт. материалы к учебнику «Математика 7. Арифметика, алгебра, анализ данных» под пер. Г.В.Дорофеева / А.П.Карп, Л.П.Евстафьева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1999. – 176 с.

9. Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики: кн. для учителя / В.Г.Коваленко. – М.: Просвещение, 1990. – 94 с.

10. Кордемский Б.А. Увлечь школьников математикой: материал для клас. и внеклас. занятий / Б.А.Кордемский. – М.: Просвещение, 1981. – 112 с.

11. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А.Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968.

12. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения / Под ред. А.Я.Смородинского / Мартин Гарднер. – М.: Мир, 1971. – 510 с.

13. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.П.Бевз, А.Г.Конфорович, З.А.Резниченко, Е.А.Ченакал / Под ред. Г.П.Бевза. – К.: Рад. шк., 1982. – 152 с.

14. Математический кружок. Первый год обучения. 5-6 кл.: метод. разработки для преподавателей. – М.: Издательство АПН СССР, 1990. – 85 с.

15. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / А.Я.Блох, Е.С.Канин, Н.Г.Килина и др.; Сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А.Оганесян, Ю.М.Колягин, Г.Л.Луканкин, В.Я.Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

17. Методика факультативных занятий в 7-8 кл.: Избранные вопросы математики: пособие для учителей / Сост. И.Л.Никольская, В.ВФирсов. – М.: Просвещение, 1981. – 160 с.

18. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в 5-8 кл.: пособие для учителя / Т.Н.Миракова // Квантор. – Львов, 1991.

19. Мочалов Л.П. Головоломки / Л.П.Мочалов / Под ред. А.П.Савина. – М.: Наука, 1980.

20. Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты / Я.И.Перельман. – М.: Дет. лит., 1972.

21. Петраков И.С. Математические кружки в 7-8 кл.: кн. для учителя / И.С.Петраков. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.

22. Пожарская Т. Вечер КВН / Т.Пожарская // Математика. – № 25. – 1999.

23. Пойа Д. Как решать задачу / Д.Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961.

24. Родионов В. Графы и кратчайшие расстояния в них / В.Родионов // Математика. – № 15. – 2001.

25. Спивак А.В. Математический праздник / А.В.Спивак. – М. 1995. – 78 с.

26. Чернышов В.А. Новый взгляд на преподавание геометрии: Планиметрия / В.А.Чернышов. – Ч. 1. – Донецк, 1999. – 75 с.

Литература, рекомендованная для учащихся

1. Байиф Ж.-К. Логические задачи: Пер. с франц. / Перевод Сударева Ю.Н.; Под редакцией и с послесл. И. М. Яглома / Ж.-К.Байиф. – М.: Мир, 1983. – 172 с.

2. Болтянский В.Г. Геометрия для IX кл. ср. шк. / В.Г.Болтянский, И.М.Яглом. – К.: Рад. шк., 1963.

3. Варданян С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: кн. для учащихся 6-8 кл. сред. шк. / С.С.Варданян / Под ред. В.А.Гусева. – М.: Просвещение, 1989. – 144 с.

4. Вейль Г. Симметрия / Г.Вейль. – М.: Просвещение, 1968.

5. Ганчев И. Математический фольклор. Пер. с болг. / И.Ганчев, К.Чимев, Й.Стоянов. – М.: Знание, 1987. – 208 с.

6. Глаголев Н.А. Элементарная геометрия: для 6-8 кл. / Н.А.Глаголев. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз., 1954.

7. Гусев В.А. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов / В.А.Гусев. – М.: Просвещение, 1979.

8. Депман И.Я. За страницами учебника математики: пособие для учащихся 5-6 кл. сред. шк. / И.Я.Депман, Н.Я.Виленкин. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

9. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки / Е.И.Игнатьев / Под ред. М.К.Потапова.– 2-е изд. – М.: Наука, 1979.

10. Карелін Л.З. Збірник геометричних задач і вправ на дослідження / Л.З.Карелін. – К.: Рад. шк., 1969.

11. Коба В.І. Найпростіші геометричні перетворення / В.І.Коба, М.А.Нікулін. – К.: Рад. шк., 1978.

12. Логические игры и задачи / Сост. Г.С.Шиманская, В.И.Шиманский. – Д.: Сталкер, 1998. – 448 с.

13. Лоповок Л.М. Збірник вправ з геометрії для 6-8 кл. / Л.М.Лоповок. – К.: Рад. шк., 1977.

14. Лэнгдон Н. С математикой в путь: [для мл. и сред. шк. Возраста] / Н.Лэнгдон, С.Чарльз. – М.: Педагогика, 1987. – 47 с.

15. Мазаник А.А. Реши сам / А.А.Мазаник. – 2-е изд, перераб. – Мн.: Нар. Асвета, 1980. – 239 с.

16. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.П.Бевз, А.Г.Конфорович, З.А.Резниченко, Е.А.Ченакал / Под ред. Г.П.Бевза. – К.: Рад. шк., 1982. – 152 с.

17. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка: пособие для учащихся / Ф.Ф.Нагибин, Е.С.Канин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 160 с.

18. Перельман Я.И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки / Я.И.Перельман / Под ред. В. Г. Болтянского. – 8-е изд. перераб и доп. – М.: Наука, 1967 – 160 с.

19. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования: пособие для учащихся / Г.И.Саранцев. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Просвещение, 1981. – 112 с.

20. Сборник математических олимпиад: пособие для внеклассной работы по математике / Сост. А.А.Леман / Под ред. В.Г.Болтянского. – М.: Просвещение, 1965.

21. Скобелев Г.М. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.М.Скобелев, В.П.Берман, Ю.А.Артамонов. – К.: Рад. шк., 1969.

22. Спивак А.В. Математический праздник / А В.Спивак. – М. 1995. – 78 с.

23. Факультативный курс. Избранные вопросы математики (7-8 кл.). – М.: Просвещение, 1978. – 192 с.

24. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике: кн. для учащихся / Л.М.Фридман. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.

25. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7 (теория, задачи) / И.Ф.Шарыгин. – М.: Мирос, 1995. – 442 с.

26. Шарыгин И.Ф. Математический винегрет / И.Ф.Шарыгин. – М.: Агенство «Орион», 1991.

27. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия, 5-6 кл.: пособие для общеобр. учеб. заведений / И.Ф.Шарыгин, Л.Н.Ерганжиева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1999. – 192 с.

28. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве / А.В.Шубников, В.А.Копцик. – М.: Просвещение, 1968.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Учебно-методическое сопровождение

факультативного курса в виде отдельного тома

Приложение

Е.И. Скафа, И.В. Гончарова

Учебно-методическое сопровождение факультативного курса для учащихся 8 класса

ЭВРИСТИКИ В ГЕОМЕТРИИ

(переведенное на русский язык издание авторов:
Гончарова І.В. Евристики в геометрії / І.В.Гончарова, О.І.Скафа. – Харків: Видавн.група "Основа", 2004. – 112 с.)

Донецк 2016

СОДЕРЖАНИЕ

СТРУКТУРА ЗАНЯТИЙ ФАКУЛЬТАТИВА..... 3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ФАКУЛЬТАТИВА 13

Занятие 1. Введение в факультатив..... 13

Занятие 2. Эвристики при решении задач..... 18

Занятие 3. Геометрическое зрение..... 27

Занятие 4. Обман зрения. Софизмы. Контрпримеры..... 32

Занятие 5. Симметрия. Исследовательская работа.
Опыты с зеркалами..... 44

Занятие 6. Осевая и центральная симметрия..... 47

Занятие 7. «Метод симметрии» в решении задач..... 56

Занятие 8. Перебор вариантов. Анализ и синтез при решении задач... 62

Занятие 9. Перебор вариантов. Геометрия танграма..... 66

Занятие 10. Метод математического моделирования.
Решение задач с практическим содержание..... 73

Занятие 11. Модели многогранников. Формула Эйлера..... 77

Занятие 12. Графическое моделирование.
Решение задач с помощью графов..... 83

Занятие 13. Графическое моделирование.
Задачи на вычерчивание фигур одним росчерком..... 89

Занятие 14. Практикум по решению эвристических задач..... 93

Занятие 15. Зачет..... 96

Занятие 16. Итоговое занятие..... 97

ОТВЕТЫ И ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПОДСКАЗКИ..... 99

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ..... 110

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ..... 112

СТРУКТУРА ЗАНЯТИЙ ФАКУЛЬТАТИВА «ЭВРИСТИКИ В ГЕОМЕТРИИ»

(содержание; формы занятий; задания учащимся)

ЗАНЯТИЕ 1. ВВЕДЕНИЕ В ФАКУЛЬТАТИВ

Содержание занятия

1. Беседа о тематике факультатива и основных его понятиях.
2. Диагностика творческого потенциала учащихся.
3. Практикум.

Задания к практикуму

1. Выполнить упражнения на применение метода «проб и ошибок».

2. Решить задачи, предложенные для проверки творческого мышления.

3.Оценить предложенные задания с точки зрения:

а) интереса (какие задания понравились, почему);

б) доступности (какие оказались легкими, а какие дались тяжело);

в) эвристичности (какие задачи являются эвристическими и почему).

Домашнее эвристическое задание

Дома или в школьной мастерской сделать четыре стержня (отрезка) длиной 4, 7, 10 и 13 см. Соединяя концами три стержня из четырех, выясните, из каких трех стержней можно составить треугольник, а из каких нельзя. Объяснить выводы.

Новые термины

«Эврика», эвристика, эвристическая (нестандартная) задача, стандартная (алгоритмическая) задача, гипотеза, интуиция, инсайт.

Эвристические приемы

Метод «проб и ошибок».

ЗАНЯТИЕ 2. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Содержание занятия

1. Открытие неравенства треугольника.
2. Беседа о решении математических задач.
3. Демонстрация на примере применения рекомендуемых советов и

вопросов при решении задачи.

4. Беседа об эвристике «постановка задачи».
5. Рассмотрение задач с несформулированным вопросом, с неполным составом условия, с избыточным составом условия.
6. Практикум.

Задания к практикуму

Придумать несколько задач:

а) некорректно составленных;

б) с недостающими условиями;

в) с избыточными условиями;

г) с несформулированным вопросом.

Проанализировать каждую задачу: выделить недостающие условия, избыточные условия, указать несформулированный вопрос. Какие возникают гипотезы во время рассуждений? Из каких соображений составлена задача? Сделать задачи корректными. Поменяться составленными задачами и выполнить задание.

Домашнее эвристическое задание

Подобрать или придумать задачи: «некорректные», с избыточными, недостающими условиями. Проанализировать их, указать недостающие и избыточные условия.

Новые термины

Неравенство треугольника, «разумная» задача; корректность задачи; эвристические правила (эвристики); задачи с несформулированным вопросом; задачи с неполным составом условия; задачи с избыточным составом условия.

Эвристические приемы

«Постановка задачи».

ЗАНЯТИЕ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗРЕНИЕ

Содержание занятия

1. Беседа об эвристике «умение видеть и наблюдать».

2. Геометрический тренинг (самостоятельная работа).

Домашнее эвристическое задание

Придумать свой чертеж, чтобы на нем были отрезки, прямая, 2 луча, окружность с центром и радиусами, сегмент, сектор, треугольники, четырехугольники.

Новые термины

«Геометрическое зрение».

Эвристические приемы

«Умение видеть и наблюдать».

ЗАНЯТИЕ 4. ОБМАН ЗРЕНИЯ. СОФИЗМЫ. КОНТРПРИМЕР

Содержание занятия

1. Рассмотрение неоднозначных рисунков.
2. Обманы зрения. Примеры.
3. Теория перспективы.
4. Знакомство с софизмами.
5. Беседа об эвристике «контрпример и подтверждающий пример».
6. Практикум.

Задание к практикуму

Решить предложенные софизмы.

Домашнее эвристическое задание

Придумать и нарисовать свою картинку с кажущимися выпуклостями и вмятинами на листе бумаги.

Новые термины

Неоднозначные рисунки; обман зрения; теория перспективы; софизм; контрпример и подтверждающий пример.

Эвристические приемы

Контрпример и подтверждающий пример, задача-софизм, «умение видеть и наблюдать».

ЗАНЯТИЕ 5. СИММЕТРИЯ. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА. ОПЫТЫ

С ЗЕРКАЛАМИ

Содержание занятия

Исследовательская работа.

Задания к исследовательской работе

1. Написать свое имя печатными буквами в столбик и посмотреть на его отражение в зеркале. Поворачивает ли зеркало ваше имя? А имя ЮРА? Чем отличаются записи МАША и РОМА? Полоски с именами расположить параллельно поверхности зеркала.

2. Проверить, меняет ли зеркало местами:

а) левую и правую стороны, верх и низ, предметы спереди и сзади вас, если вы стоите лицом к зеркалу? А если стать к зеркалу боком?

б) последовательность предметов, лежащих на столе, если поверхность стола перпендикулярна зеркалу?

3. Представить себя стоящим на зеркальном полу. Что меняется местами?

4. На полоске бумаги горизонтально печатными буквами написаны слова ЧАЙ и КОФЕ. Положить эту полоску перед зеркалом на стол. Почему зеркало не перевернуло слово КОФЕ и до неузнаваемости изменило слово ЧАЙ?

5. Поставить два зеркала под прямым углом друг к другу. Поменялись ли на изображении местами правая и левая стороны? В зеркалах, стоящих перпендикулярно друг другу, мы видим себя такими, какими видят нас другие люди. Почему? А какое изображение получится, если линия соединения зеркал будет горизонтальной?

Домашнее эвристическое задание

1. Сделать свой калейдоскоп из двух плоских зеркал, поставленных на лист белой бумаги под углом друг к другу. На листе между зеркалами нарисуйте какую-нибудь фигуру или произвольную линию. Измените угол между зеркалами. Сколько раз зеркала отражаются друг в друге?

2. Как зависит рисунок в вашем калейдоскопе от угла между

зеркалами? Сравнить рисунки, если угол между зеркалами равнее 30^0, 45^0, 90^0, 120^0 (эти углы начертите с помощью транспортира на листе бумаги под зеркалами). Зарисовать их в тетради.

3. Прочитать книгу, глядя не в нее, а в ее отражение в зеркале. Написать хоть строку, глядя не на лист бумаги, а на его зеркальное отражение?

ЗАНЯТИЕ 6. ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Содержание занятия

1. Беседа о симметрии.
2. Осевая симметрия.
3. Построение симметричных фигур.
4. Самостоятельная работа «Построение симметричных фигур на миллиметровой бумаге».

Задание к самостоятельной работе

С помощью линейки провести карандашом прямую, совпадающую с одной из жирных линий, намеченных на миллиметровой бумаге. По одну сторону от проведенной прямой изобразить какую-либо фигуру и поменяться чертежами с соседом по парте. Для фигуры, которую нарисовал сосед, построить симметричную ей фигуру относительно проведенной прямой (это легко сделать, используя деления миллиметровой бумаги).

5. Центральная симметрия.
6. Практикум.

Задание к практикуму

Решить предложенные задачи.

Домашнее эвристическое задание

Найти и написать как можно больше симметричных предметов, сооружений в окружающей обстановке дома и на улице. Написать небольшое «научное» сочинение (рассказ) на тему «Симметрия в моей жизни» или «Симметрия в природе».

Используемые термины

Симметрия; ось симметрии; зеркальная (осевая) симметрия; центр симметрии; центральная симметрия.

ЗАНЯТИЕ 7. СИММЕТРИЯ. «МЕТОД СИММЕТРИИ» В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ.

Содержание занятия

1. Игра-конкурс букв и слов.
2. Освоение «метода симметрии» в решении задач.
3. Практикум.

Задание к практикуму

Решить некоторые задачи «методом симметрии». Проанализировать, какую роль сыграла симметрия при их решении.

4. Проведение математического боя.

Задания к математическому бою

Решить предложенные задачи, найти выигрышные стратегии для некоторых задач-игр. Проанализировать каждую задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция для решения задачи;

в) что послужило инсайтом для решения задачи.

Новые термины

Метод симметрии; кратчайший путь; выигрышная стратегия.

Эвристические приемы

Использование симметрии.

ЗАНЯТИЕ 8. ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Содержание занятия

1. Беседа об эвристике «перебор вариантов».
2. Анализ и синтез при решении задач на построение.
3. Практикум.

Задание к практикуму

Решить предложенные задачи на построение с использованием

указанных эвристик.

Новые термины

Перебор; поиск наилучшего варианта; многовариантность; анализ; синтез.

Эвристические приемы

Перебор вариантов; анализ; синтез.

ЗАНЯТИЕ 9. ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ. ГЕОМЕТРИЯ ТАНГРАМА

Содержание занятия

1. Знакомство с Танграмом.
2. Практикум. Выполнение индивидуального задания.

Задания к практикуму

Изготовить головоломку Танграм.

Выполнить предложенные задания, сделать «сборочные чертежи».

3. Конкурс по складыванию фигурок танграма.

Домашнее эвристическое задание

Придумать свои примеры композиций фигурок танграма.

Новые термины

Танграм; таны; «сборочный чертеж».

Эвристические приемы

Перебор, поиск наилучшего варианта.

ЗАНЯТИЕ 10. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Содержание занятия

1. Беседа об эвристике «моделировании».
2. Практикум.

Задания к практикуму

Переформулировать практическую задачу в геометрическую. Решить ее. Изобразить геометрическую модель.

3. Выполнение исследовательской работы.

Задание к исследовательской работе

Определить, нормально ли освещение класса.

Домашнее эвристическое задание

Определить, нормальное ли освещение в той комнате, где делаются уроки.

В одной из комнат квартиры (дома) выбрать стену с окном (окнами) и составить (нарисовать) ее геометрическую модель. Сделав необходимые замеры с помощью измерительной ленты, вычислить площадь той поверхности стены, которая покрыта обоями.

Найти площадь поперечного сечения выбранного дерева, имеющего (приблизительно) форму круга, предварительно измерив дерево в обхвате.

Последнее задание предлагается выполнить, разделившись на группы.

Новые термины

Объект; математический объект; математическая, прикладная задача; модель; объектные, геометрические, физические модели; моделирование.

Эвристические приемы

Моделирование; переформулировка задачи.

ЗАНЯТИЕ 11. МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Содержание занятия

1. Изготовление моделей многогранников.
2. Вывод формулы Эйлера.
3. Практикум.

Задания к практикуму

Сделать модель куба и исследовать его свойства при выполнении предложенных заданий.

4. Игровая головоломка «Шахматный куб».
5. Другой способ изготовления моделей многогранников.

Домашнее эвристическое задание

Найти второй способ плетения куба из полосок бумаги.

Придумать несколько разверток куба и начертить их в тетради.

Сделать доклад о жизни и творчестве Л. Эйлера.

Новые термины

Развертки многогранников; формула Эйлера.

Эвристические приемы

Моделирование.

ЗАНЯТИЕ 12. ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

Содержание занятия

1. Беседа об эвристическом приеме «графическое моделирование» (или «использование графов»).
2. Знакомство с основными понятиями теории графов.
3. Решение задач с помощью графов.
4. Практикум.

Задания к практикуму

Решить задачи с помощью графов.

Домашнее эвристическое задание

Используя связные и несвязные графы, изобразить «карту» местности (или путь от дома к школе и обратно).

Новые термины

Граф; вершина, ребра графа; степень вершины; связный, несвязный граф.

Эвристические приемы

Графическое моделирование (или использование графов).

ЗАНЯТИЕ 13. ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФИГУР ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

Содержание занятия

1. Открытие важного свойства о вычерчивании фигур одним росчерком.
2. Практикум.

Задания к практикуму

Начертить одним росчерком предложенные графы. Решить задачи.

Новые термины

Эйлеров граф; цикл.

Эвристические приемы

Графическое моделирование.

ЗАНЯТИЕ 14. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Содержание занятия

Практикум.

Задания к практикуму

Решить и проанализировать каждую задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция для решения задачи;

в) что послужило инсайтом при решении задачи;

г) какие эвристики использовались при решении.

ЗАНЯТИЕ 15. ЗАЧЕТ

Содержание занятия

Зачет.

Задания к зачету

Решить предложенные задачи. Проанализировать каждую задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция, инсайт для решения задачи;

в) какие эвристики использовались при решении каждой задачи.

ЗАНЯТИЕ 16. ИТОГОВОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание занятия

1. Самооценка и взаимооценка составленных учащимися задач и творческих работ.
2. Проведение конкурса.

Задания к конкурсу. Конкурс 1. Игра на внимание. Как можно быстрее указать все числа на плакате от 1 до 30. Конкурс 2. Прочесть свои сочинения на темы: «Симметрия в моей жизни», «Симметрия в природе». Конкурс 3. Сделать «сборочный чертеж» своей композиции фигурок танграма. Конкурс 4. На самый оригинальный рисунок с кажущимися выпуклостями и вмятинами.

3. Подведение итогов о проделанной работе учащихся в течение всех занятий факультатива.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ФАКУЛЬТАТИВА

ЗАНЯТИЕ 1. ВВЕДЕНИЕ В ФАКУЛЬТАТИВ

I. В начале занятия учитель в ходе беседы узнает у учащихся, почему они решили посещать факультатив «Эвристики в геометрии».

Учитель рассказывает учащимся о темах и формах последующих занятий, дает список литературы, сообщает о проведении зачета в конце курса.

II. Учитель знакомит учащихся с происхождением слова «эврика» и значением слов «эвристика», «эвристическая задача». Перечисляет такие приемы решения эвристических задач как постановка задачи, переформулировка задачи, использование симметрии, перебор, поиск наилучшего варианта и др.

«*Эврика!*» – это восклицание древнего ученого и изобретателя Архимеда. Это слово не просто констатация факта находки, в нашем сознании оно ассоциируется с выражением высшего чувства удовлетворения, радости и восторга от найденного решения задачи, которую до этого не удалось решить, и путь ее решения был очень не простой и долгий.

Легенда об открытии Архимедом закона плавающих тел рассказывает, что однажды царь Гиерон, получив от мастеров-ювелиров заказанную им золотую корону, усомнился в их честности. Ему показалось, что они утаили часть золота, заменив его серебром. Но как уличить ювелиров в подделке? Гиерон вызвал Архимеда и поручил ему определить, есть ли в золотой короне серебро.

Сегодня такая задача по плечу любому школьнику, но ведь Архимед не был знаком даже с понятием «плотность». И он приступил к поискам решения. И чудо свершилось! Причем произошло это … в бане. Намылившись золой, Архимед решил принять ванну. Естественно, вода в ней

поднималась по мере того, как ученый погружался все глубже и глубже, и если раньше он не обращал на это внимания, то теперь явление заинтересовало его: он привстал – уровень воды опустился, он снова сел – вода поднялась. «Эврика! Эврика! Я нашел!» Архимед понял, что задача царя вполне разрешима.

Такова была история происхождения слова «эврика».

Прошло более двух тысячелетий, и в нашем лексиконе появилось слово «эвристика». В настоящее время слово «эвристика» нашло широкое распространение. Так в философских словарях: «Эвристика (греч. *Heurisko* – отыскиваю, открываю) – наука, изучающая творческую деятельность».

Эвристика – 1. Наука, изучающая закономерности поиска решения задач. 2. Прием (правило) поиска решения задач.

Эвристика охватывает все возможные задачи, в частности прикладные задачи и даже головоломки.

Эвристическими задачами будем называть такие задачи, при поиске решения которых используются различные эвристические приемы.

Решение эвристических задач состоит в том, чтобы свести их к решению одной или нескольких стандартных задач.

Определение. Математические задачи, для которых в математике имеются готовые правила, называются *стандартными* (*алгоритмическими*).

Решение стандартных задач особых трудностей не представляет. Надо лишь распознать вид данной задачи, вспомнить соответствующее этому виду задач правило и применить его к условиям данной задачи.

Значительно труднее решать нестандартные (эвристические) задачи. При решении эвристических задач необходимо не только логическое мышление, иногда помогает интуиция, инсайт, гипотеза.

Определение. *Гипотеза* – научное предположение (догадка, предвидение, предугадывание), которое требует проверки и теоретического обоснования, чтобы стать достоверным утверждением.

Определение. *Интуиция* – способность переходить к интеллектуальному

результату подсознательно, на основании чувства «безусловной правильности определенного суждения (по формуле «Я не знаю почему, но я уверен, что…»).

Определение. *Инсайт* (дословно «озарение») – неожиданное понимание сути проблемы, которое выражается в возможности увидеть связи между элементами проблемы под новым углом зрения.

Обсуждается механизм догадки, озарения.

III. Учитель приводит пример, показывающий отличие стандартной и нестандартной задачи.

Задача 1. Посередине участка квадратной формы устроена цветочная клумба, которая также имеет форму квадрата. Площадь участка равна 100м^2. Сторона клумбы в 2 раза меньше стороны участка. Чему равна площадь клумбы?

Задача 2. На квадратном участке расположены три дома (рис. 1), а в ограде сделаны три калитки. От каждой калитки проложена дорожка к домику с тем же номером, причем эти дорожки не пересекаются. Как проходят дорожки?

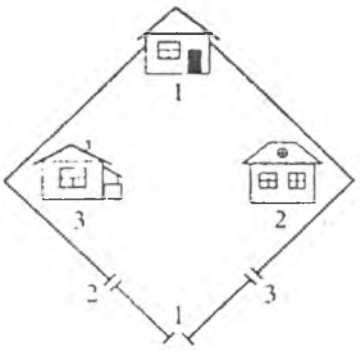


Рис. 1

Первая задача является стандартной, нужно только вспомнит алгоритм решения таких задач. Вторая же нестандартная, ибо в математике нет готовых правил решения таких задач. Здесь может помочь интуиция, инсайт.

Задание. Решить предложенные задачи.

IV. Рассматривается эвристический прием ***метод «проб и ошибок»***.

Это эвристический прием, который используется в тех ситуациях, когда у решающего нет более конструктивных идей. Многочисленные слепые пробы, ошибки, отказ от каких-то вариантов и вновь возвращение к ним, масса неудачно выбранных действий и, как правило, случайный успех, позволяющий нащупать верное решение, – вот слагаемые любых попыток предвосхищения искомого результата методом «слепого поиска».

Значительную долю задач, решаемых с помощью этой эвристики, составляют задачи, связанные с поиском закономерностей или конструированием объектов по заданным условиям.

Действие этого метода не поддается строгому и полному описанию, так как его проявление в каждом конкретном случае строго индивидуально, и поэтому невозможно заранее предугадать, какие варианты решения будет рассматривать тот или иной решатель.

Учащимся для решения предлагаются упражнения на применение метода «проб и ошибок».

Задачи и упражнения

1. Не отрывая карандаша от бумаги проведите треугольник через четыре точки (рис. 2).

2. Не отрывая карандаша от бумаги, ломаной линией, состоящей из четырех отрезков, перечеркните девять точек, как показано на рис. 3.

3. При помощи двух спичек, не ломая и не разрезая их, образуйте квадрат.

4. На рис. 4 изображены два прямоугольника. Сколько необходимо сделать разрезов ножницами для того, чтобы из получившихся кусочков можно было сложить один прямоугольник?

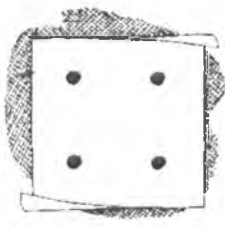


Рис. 2

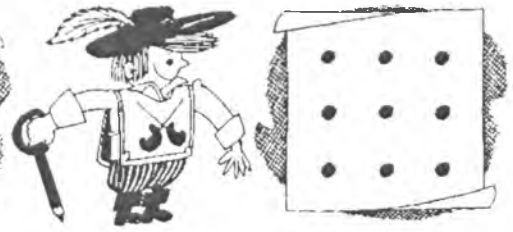


Рис. 3

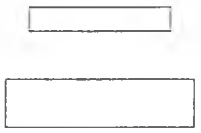


Рис. 4

5. Разделите двумя прямыми линиями прямоугольник на 2 треугольника и 2 пятиугольника.

6. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т. д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.

V. Для выяснения насколько у школьников развито творческое мышление предлагаются следующие задания.

Задания для диагностики творческого потенциала

1. Сколько граней имеет новый шестигранный карандаш?

2. Расположите 10 точек на 5 отрезках так, чтобы на каждом отрезке было 4 точки.

3. Расставьте 24 стула так, чтобы они стояли в шесть рядов по пять стульев в каждом ряду.

4. Как в квадратной комнате поставить вдоль стен 10 стульев так, чтобы у каждой стены стояло стульев поровну?

5. Как образовать треугольник одной спичкой, не расщепляя и не ломая ее?

6. На книжной полке стоит трехтомник. Толщина каждого тома 3,5 *см*. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы третьего тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщиной обложки пренебречь.

7. Через точку на диагонали прямоугольника провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 5). У какого прямоугольника, *А* или *Б*, больше площадь?

8. Прямоугольный треугольник вписан в четверть окружности так, как показано на рис. 6. Можете ли вы, пользуясь лишь теми данными, которые приведены на чертеже, вычислить длину гипотенузы *АС*?

9. Четыре страны имеют форму треугольников. Как расположены страны одна относительно другой, если у каждой из них есть общие границы с тремя другими? Нарисуйте.

10. Ученики одной из московских школ совершили автобусную экскурсию в г. Волоколамск. Вернувшись с экскурсии, один из школьников нарисовал картинку (рис. 7). Куда на этой картинке едет автобус – в Москву или Волоколамск?

11 Как посадить девять деревьев в десять рядов по три дерева в

каждом ряду?

12. Хозяин имел квадратный двор. На четырех углах двора он посадил по дереву. Прошло время, и он захотел увеличить свой двор в 2 раза, но чтобы он по-прежнему был квадратным. Как ему поступить, чтобы деревья остались на линии ограды?

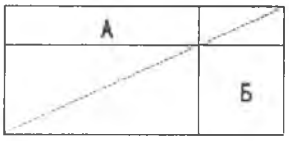


Рис. 5

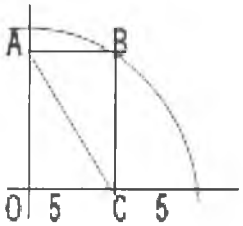


Рис. 6

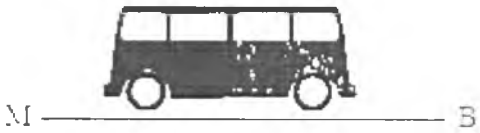


Рис. 7

Задание. Оцените предложенные вам задания с точки зрения:

а) интереса (какие задания вам понравились, почему);

б) доступности (какие оказались легкими для вас, а какие дались тяжело);

в) эвристичности (какие задачи, на ваш взгляд являются эвристическими и почему).

VI. Домашнее задание. Дома или в школьной мастерской сделайте четыре стержня (отрезка) длиной 4, 7, 10 и 13 *см*. Соединяя концами три стержня из четырех, выясните, из каких трех стержней можно составить треугольник, а из каких нельзя. Объясните ваши выводы.

ЗАНЯТИЕ 2. ЭВРИСТИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

I. Занятие начинается с разбора заданий, предложенных для проверки творческого потенциала. Затем обсуждается домашнее задание, которое практически состояло в открытии *неравенства треугольника*.

Не со всех отрезков можно составить треугольник, и в этом ученики уже смогли убедиться, когда выполняли домашнее задание. Почему, например, нельзя составить треугольник из отрезков 4, 7 и 13 *см*? Целесообразно обратиться к жизненному опыту учащихся.

– Какой путь из точки *A* к точке *C* кратчайший (рис. 8, *а*)?

– А теперь рассмотрим ΔABC (рис.8, *б*) и применим только сделанный

вами вывод $AC < AB + BC$.

– Сравните AB и $BC + AC$; BC и $AB + AC$.

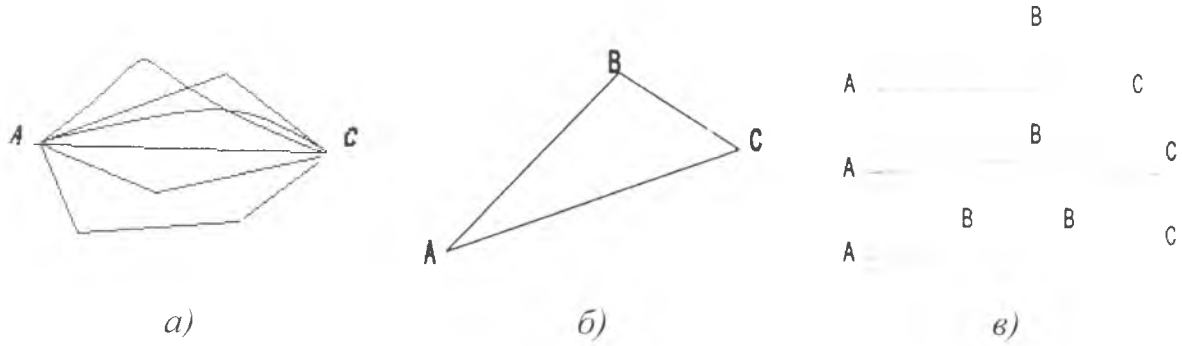


Рис 8

– На основании чего вы это утверждаете?

– Итак, какое обобщение о соотношении между сторонами треугольника можно сделать? Учитель может предложить учащимся небольшой эксперимент.

На доске появляется плакат (рис. 8, *в*). В точке A закреплены зеленая и красная полоски, в точке B – зеленая и синяя, зеленая неподвижная, красная и синяя подвижны. Если $AC < AB + BC$, можно построить треугольник, если $AC \geq AB + BC$, треугольник построить нельзя. Если $AB + BC = AC$, то $BC = AC - AB$, то есть если один отрезок равен разности двух других, треугольник нельзя построить.

– Каким должен быть BC, чтобы у нас получился треугольник?

$BC > AC - AB$.

Значит, *каждая сторона треугольника меньше суммы, но больше разности двух других сторон*.

Это высказывание называется *неравенством треугольника*.

II. Далее учитель ведет беседу о решении математических задач. Учитель формулирует и поясняет общие советы и эвристические вопросы на каждом этапе решения задачи.

Процесс решения каждой задачи принято делить на *четыре основных этапа*: 1) осмысление условий задачи; 2) составление плана решения задачи; 3) реализация плана решения задачи; 4) изучение найденного решения

(анализ и проверка плана решения задачи). На каждом этапе решения задачи нужно руководствоваться определенными правилами. Эти правила не могут носить обязательный характер, они лишь указывают возможные пути поиска. Поэтому они называются *эвристическими правилами* либо просто *эвристиками*.

1-й этап. Вопросы и советы для усвоения содержания

На ранней стадии решения задачи полезны следующие вопросы: *Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?* Ведущей эвристикой этого этапа следует считать известный афоризм: «Хорошо понять вопрос – значит наполовину ответить на него». Если с задачей связана какая-либо геометрическая фигура, то нужно сделать чертеж и указать на нем неизвестное и данное, ввести подходящие обозначения.

2-й этап. Составление плана решения задачи

Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Для составления плана решения задачи полезны следующие вопросы: *Известна ли какая-либо родственная задача? Аналогичная? Все ли данные задачи использованы? Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?* Иногда стоит воспользоваться советами: *«Попытайтесь сформулировать задачу иначе», «Преобразуйте искомые и данные», «Попробуйте решить лишь часть задачи»,* (т. е. сначала удовлетворить лишь части условий с тем, чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи). *«Расчлените задачу на более простые задачи».*

3-й этап. Реализация плана решения задачи

Полезно следовать следующим советам: *«Проверяй каждый свой шаг», «Замени термины и символы их определениями».* Например, термин «трапеция» заменяется его определением: «Четырехугольник, у которого две стороны попарно параллельны (основания), а две другие не параллельны (боковые стороны)».

4-й этап. Анализ и проверка плана решения задачи

Получение ответа не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для ее решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант (способ решения). Полезны такие советы: *«Проверьте результат», «Проверьте ход решения», «Решите задачу другим способом».*

В решении любой задачи есть крупица открытия. Задача может быть сколь угодно скромной, но если она заставила быть изобретательным, и если вы ее решили самостоятельно, то радость победы – пусть даже о ней никто, кроме вас, не узнает, – должна быть огромной. Вспомните Архимеда, который выскочил из ванной! Если же задача не получилась, и пришлось читать чужое решение, обязательно возникает вопрос: «Как можно было до этого догадаться?». Ответ прост: нельзя научиться плавать, не войдя в воду.

Высказывания некоторых выдающихся мудрецов.

Если ученик в школе не научится сам ничего творить, то и в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы, научившись копировать, умели сделать самостоятельное применение этих сведений. (Л. Н. Толстой)

Умение решать задачи – такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения. (Д. Пойа)

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и непонятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно. (Д. Юнг)

III. Учитель демонстрирует применение рекомендуемых советов и вопросов на примере решения задачи: «Три пункта A, B, C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, длина которого равна половине длины AB, к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле, длина стороны которого равна BC, а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и

шириной 4 *км*. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса».

Усвоение содержания задачи

1). Ознакомившись с задачей, начинаем работу по усвоению ее содержания.

2). Выделим данные: даны пункты A, B, C, поля площадью $(0{,}5\ AB)^2$ и BC^2, лес площадью $4AC$. Известно, что площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей полей. Искомой является площадь леса, точнее его длина AC.

3). Полезно выполнить чертеж (рис. 9).

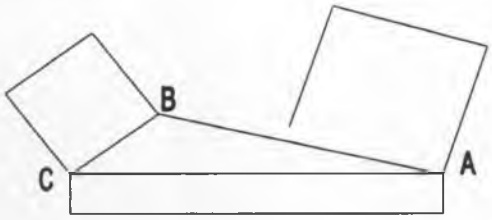


Рис. 9

4). Введем обозначения $AB=x$, $BC=y$, $AC=z$.

Составление плана решения задачи

Мы уже установили часть связи между данными и искомыми. Теперь эту связь можно записать в виде уравнения

$$4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20. \qquad (1)$$

При первом взгляде уравнение (1) кажется неопределенным (в нем 3 переменных), а задача – не имеющей решения. Однако не стоит спешить с выводами. Последуем одному из указанных советов и зададим себе вопрос: «*Все ли данные задачи использованы*?», иными словами: «*Не содержит ли условие задачи неявно заданных связей между искомыми и данными*?»

Внимательное исследование условия позволяет установить еще связи между данными и искомыми: x, y, z – длины сторон треугольника ABC, они удовлетворяют аксиоме (неравенству) треугольника (*любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности*: $|a-b| < c < a + b$). Поэтому

$$\begin{cases} 4z = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + 20, \\ x + y \geq z, \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$x + y \geq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5. \qquad (3)$$

Внимательное и вдумчивое рассмотрение этого неравенства позволяет «распознать» скрытые в нем квадраты двучленов. Итак, план решения составлен.

Реализация плана

Перенесем все переменные в одну (правую) часть неравенства, получим неположительный многочлен.

$$\frac{x^2}{16} - x + \frac{y^2}{4} - y + 5 = \frac{x^2}{16} - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot 2 + 4 + \frac{y^2}{4} - 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot 1 + 1 = (\frac{x}{4} - 2)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2. \qquad (4)$$

Так как сумма квадратов не может быть отрицательной, то получаем эквивалентное системе (2) уравнение

$$(\frac{x}{4} - 2)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 = 0. \qquad (5)$$

Отсюда $\frac{x}{4} - 2 = 0$ и $\frac{y}{2} - 1 = 0$, или $x = 8$ и $y = 2$. Но тогда $z = 10$ из уравнения (1), а площадь леса $4 \cdot 10 = 40$ ($км^2$).

Проверка решения

1). Подстановкой в уравнение (1) устанавливается, что найденные значения x, y, z являются его решением.

2). Можно вычислить площади заданных в условии квадратных полей и сравнить их с площадью леса: $(0{,}5\ AB)^2 = 16$ ($км^2$), $BC^2 = 4$ ($км^2$), $4\ AC = 20 = (0{,}5\ AB)^2 + BC^2$. Последнее соответствует условию задачи.

3). Остается установить геометрический смысл результата. Поскольку x, y, z – длины сторон треугольника и $x + y = z$, то этот треугольник вырождается в отрезок прямой, т.е. точки (пункты) A, B, C лежат на одной прямой. Геометрическая иллюстрация условия задачи в отличие от рисунка

10 должна быть следующей (рис. 10).

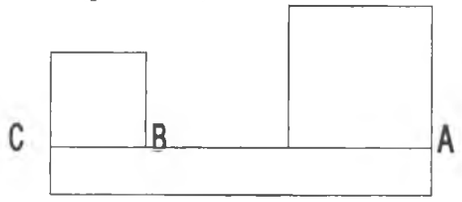


Рис. 10

Начиная решать задачу, мы не могли выполнить такой чертеж, так как истинную связь между переменными *x, y, z* выявили в процессе решения задачи.

IV. Рассматривается такой эвристический прием как ***«постановка задачи»***.

В решении задачи очень важна сама ее постановка, поскольку глупо отвечать на вопрос, который не понятен. Задача должна быть поставлена корректно (правильно), чтобы ученик оказался в состоянии повторить ее формулировку, а также указать ее главные элементы – неизвестное, данное, условие.

Разбирается следующая задача: «Вычислите площадь прямоугольника, если известно, что одна сторона в 2 раза меньше другой».

«Разумна» ли наша задача? Возможно ли ответить на поставленный вопрос? Достаточно ли условий для ответа? Нет, нам не хватает данных. Задача поставлена некорректно, поэтому и решение искать не стоит.

Задание

1. Сделайте задачу корректной. Какое условие нужно добавить, чтобы задачу можно было решить?

2.Придумайте несколько некорректно поставленных задач. Проанализируйте каждую задачу:

а) какие возникают гипотезы во время размышлений;

б) из каких соображений составлена задача.

V. Далее рассматриваются задачи трех серий: задачи с несформулированным вопросом, задачи с неполным составом условия, задачи с избыточным составом условия.

1). Задачи с несформулированным вопросом

Учитель делает некоторые пояснения.

В этих задачах ни прямо, ни косвенно не формулируется вопрос, но этот вопрос логически вытекает из данных в задаче математических отношений.

В следующих задачах укажите несформулированный вопрос (или: к данным предложениям сформулируйте вопросы, чтобы получились задачи). Несформулированный вопрос указывается в скобках.

Задачи и упражнения

1. В треугольнике первый угол на 30^0 больше второго, а третий угол на 20^0 меньше первого. (Найдите величины углов.)

2. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 6 *см* дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 44 *см*. (Найдите длины сторон.)

3. Дан квадрат. Если одну его сторону уменьшить на 1,2 *м*, а другую на 1,5 *м*, то площадь полученного прямоугольника будет на 14,4 $м^2$ меньше площади квадрата. (Какова длина стороны квадрата?)

Задание. Проанализируйте каждую задачу:

а) укажите несформулированный вопрос;

б) решите задачи;

в) какие возникают гипотезы во время размышлений;

г) из какого соображения вы пришли к такой формулировке вопроса.

2). Задачи с недостающими данными

В этих задачах отсутствуют некоторые данные, вследствие чего дать точный ответ на вопрос задачи не представляется возможным. При введении этих данных точный ответ может быть получен.

Для примера рассматривается следующая задача:

Задача. Вычислите сторону квадрата площадью 64 $см^2$. Вычислите сторону прямоугольника площадью 36 $см^2$.

Возможна примерно следующая эвристическая беседа.

– Можем ли мы решить первую задачу?

– Да, так как у квадрата стороны равны, а площадь равна 64 *см*^{2}, составим уравнение $x \cdot x = 64 \longrightarrow x = 8$ (см).

– А сможем ли мы так же легко решить вторую задачу?

– Нет, так как у прямоугольника все стороны не равны?

– Чего не хватает? Что надо добавить?

– Надо знать величину одной из сторон или отношение величин сторон.

3). Задачи с избыточными данными

В этих задачах введены дополнительные, ненужные, не имеющие значения показатели, до известной степени маскирующие необходимые для решения данные.

Рассматривается следующая задача:

Задача. Дан равнобедренный треугольник, одна сторона его 2 *см*, другая 10 *см*, *третья равна одной из двух данных*. Найдите третью сторону.

Возможны такие вопросы: Что дано? Что найти? Возможно ли удовлетворить условию? Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны? Или чрезмерны? Или противоречивы? В результате беседы выясняется, что лишними данными являются «третья равна одной из двух данных».

Задание. Сформулируйте задачу правильно.

VI. Учащимся предлагается решить следующие задачи, проанализировать каждую задачу, выделить недостающие и избыточные условия, сформулировать и записать задачу, чтобы она стала правильной (в скобках указываются недостающие для точного решения данные, избыточные данные подчеркнуты).

Задачи и упражнения

1. В равнобедренном треугольнике две стороны его относятся как 3:8. Определить стороны, если периметр треугольника равен 38 *см*, <u>а одна сторона на 10 *см* больше другой</u>, причем стороны выражаются целыми

числами.

2. Даны две окружности, радиус одной из них 3 *см*, расстояние между их центрами 10 *см*. Пересекаются ли эти окружности? (Требуется знать радиус другой окружности.)

3. Дано: $AB = AC = BC$ (рис. 11);

ΔABC равносторонний;

$ВД \parallel AC$.

Доказать: $ВД$ биссектриса $\angle EBC$.

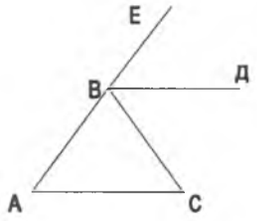


Рис. 11

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона меньше основания. Периметр его 31 *см*. Какова величина сторон треугольника? (Надо знать величину одной из сторон или отношение боковой стороны и основания).

5. Стороны треугольника относятся как 5:4:3. Найдите величину его сторон. (Надо знать величину периметра или хотя бы одной из сторон.)

6. Дано: $\angle AOB = \angle ДОЕ$ (рис. 12);

OC биссектриса $\angle ВОД$;

$\angle ДОЕ = 20^0$.

Доказать: OC биссектриса $\angle AOE$.

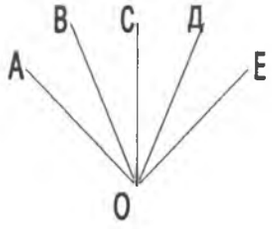


Рис. 12

VII. Домашнее задание. Подберите или придумайте задачи: «разумные», «некорректные», с избыточными условиями, с недостающими условиями. Проанализировать их, указать недостающие и избыточные условия, решить.

ЗАНЯТИЕ 3. ПРАКТИКУМ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗРЕНИЕ

I. Для проверки домашнего задания учитель предлагает обменяться придуманными задачами с соседями по партам, указать недостающие и избыточные условия, сформулировать задачи правильно и решить их. Обсуждение некоторых задач.

II. Учитель проводит беседу с учащимися, рассматривается такая

эвристика, как «***умение видеть и наблюдать***».

В геометрии очень важно уметь смотреть и видеть, замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы из замеченных особенностей. Эти умения, которые вместе можно назвать «геометрическим зрением», необходимо постоянно тренировать и развивать.

Нужно учиться видеть, наблюдать. Ведь можно смотреть и мало видеть, надо научиться не просто смотреть, а видеть встречающиеся объекты во всем их многообразии свойств и отношений.

Каждый математический объект имеет очень много различных свойств. Но при определении этих объектов указывают лишь самые существенные свойства, необходимые и достаточные для их распознания.

Пример. Средняя линия треугольника определяется как отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Рассмотрим треугольник *ABC* и среднюю линию *EF* в нем (рис. 13). Какими свойствами обладает *EF*?

Учащиеся: *EF*:

1) отрезок;

2) средняя линия треугольника *ABC*;

3) *EF* параллельна *AB*;

4) равна половине стороны *AB*.

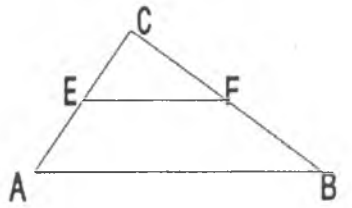


Рис. 13

Учитель:

Все верно, это вытекает из определения средней линии и из известного свойства. А ведь *EF* обладает еще многими *другими* свойствами. Вот некоторые из них: *EF* – сторона треугольника *EFC* и она меньше основания трапеции *ABEF*; *EF* – сторона углов *EFC, EFB, FEA* и *CEF, EF* делит треугольник на две части, притом площадь верхней части составляет одну четверть площади всего треугольника, и т. д.

Действительно, этот простой математический объект, кроме свойств, указанных в определении и теоремах, обладает еще и многими другими свойствами. Надо учиться их замечать, видеть, ибо без такого многообразного взгляда на математические объекты, вы не сумеете решать

математические задачи, доказывать теоремы.

III. В качестве тренировки учащимся предлагаются такие упражнения.

Задачи и упражнения

1. Перечислите все свойства, которыми обладает *BD* на рис. 14.

2. Прямоугольник *АВСД* (рис. 15) разделен на части прямыми *КМ* и *ОР*. Сколько получилось разных прямоугольников? Найдите на этом рисунке девять прямоугольников.

3. Десять точек расположены так, как показано на рис. 16. Сколько правильных треугольников можно построить, считая эти точки вершинами треугольников? Какое наименьшее количество точек надо отбросить, чтобы не осталось ни одного правильного треугольника?

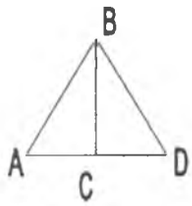


Рис. 14

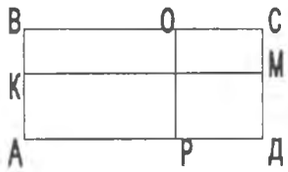


Рис. 15

Рис. 16

4. Из одной точки окружности проведены две хорды. Сколько получилось сегментов?

5. На плоскости проведены 4 попарно пересекающиеся прямые. Точки их пересечения обозначены, как на рис. 17. Рассмотрите углы: $\angle ABC, \angle CAB, \angle DBC, \angle DAC, \angle DBE, \angle DEC, \angle BED, \angle CEF, \angle CFE, \angle CFD.$ Какие из этих обозначений соответствуют одному и тому же углу? Какие углы являются вертикальными? Какие смежными?

6. На прямой линии отмечены *n* точек. Сколько лучей на ней они определяют?

7. На сколько частей, имеющих не более одного общего луча, делят плоскость прямые, определяемые сторонами: 1) треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника?

IV. Обычно в математике объекты рассматриваются относительно друг друга, также как и в жизни. Отрезок *EF* становится средней линией, если он

проведен соответствующим образом в треугольнике, а сам по себе он просто отрезок. Посмотрите на чертеж (рис. 18). На этом чертеже изображена прямая *AB*, перпендикулярная к прямой *AC, BC* – наклонная к этой же прямой. Но та же прямая *AB* является наклонной к прямой *BC*, а сама *AC* перпендикулярна *AB* и наклонена к *BC*. Таким образом, одна и та же прямая может быть перпендикулярной к одной прямой и наклонной к другой.

Если объект сложный, то, рассматривая его, надо уметь все правильно схватить, увидеть все его особенности. Для этого сам процесс рассмотрения надо производить в определенном порядке, а не хаотично.

Посмотрите на чертеж (рис. 19). Сколько на нем изображено треугольников? Рассматривая внимательно чертеж слева направо, находим всего 15 треугольников: *AOE, OEH, OEP, EHP, EBL, EMB, EKM, EKL, KFR, KML, KBL, RMQ, RCB, QLC, PBN*.

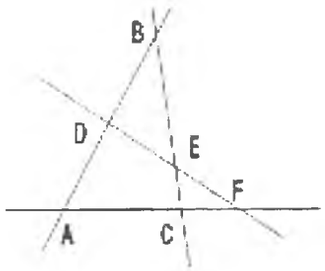


Рис. 17

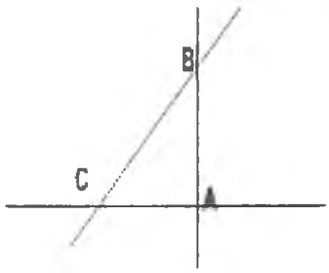


Рис. 18

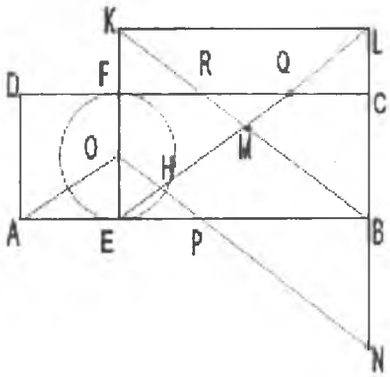


Рис. 19

А сколько там изображено различных четырехугольников? Находим 5 прямоугольников: *AEFD, ABCD, EBCF, EBLK, FCLK*; один параллелограмм – *ONBE*; 8 трапеций: *AOFD, OHMK, HPBM, HNBM, KRQL, EBCQ, KRCL, KFQL*; 2 неправильных четырехугольника – *AOHE* и *MBCQ* и, наконец, один пятиугольник *OHMRF*.

А еще там имеется окружность центра *O* с диаметром *EF*, с двумя другими радиусами, с несколькими секторами, сегментами. Как видим, какое богатство различных фигур мы обнаруживаем при внимательном рассмотрении этого незамысловатого чертежа.

V. Проводится геометрический тренинг (самостоятельная работа, рассчитанная на 20-30 минут).

Геометрический тренинг

1. Назовите все отрезки на рис. 20.

Рис. 20

2. Сколько секторов изображено на рис. 21?

3. Назовите все треугольники на рис. 22.

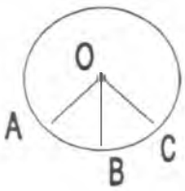


Рис. 21

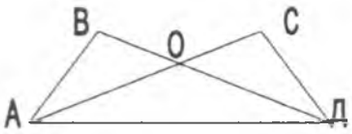


Рис. 22

4. Назовите все углы на рис. 23.

5. Какие фигуры можно выделить на рис. 24? Сколько, в том числе, треугольников?

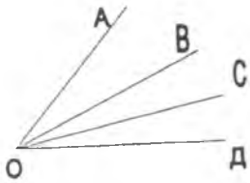


Рис. 23

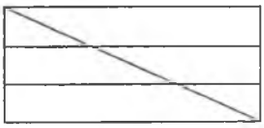


Рис. 24

6. Укажите на рис. 25 часть плоскости, общую всем трем фигурам: общую кругу, треугольнику и прямоугольнику.

7. Чем на рис. 26 является отрезок *AB*?

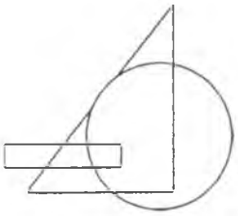


Рис. 25

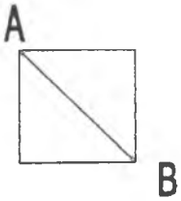


Рис. 26

8. Что представляет собой отрезок *AC* на рис. 27?

9. Что такое на рис. 28 отрезок *КЕ*?

10. Назовите все пары вертикальных углов на рис. 29?

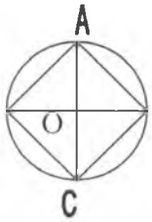


Рис. 27

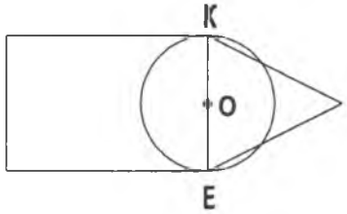


Рис. 28

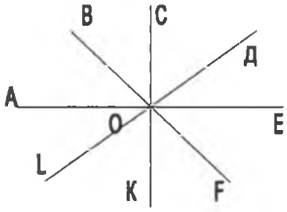


Рис. 29

11. Сколько треугольников на рис. 30? А сколько квадратов? Какие еще фигуры на этом чертеже?

12. Сколько четырехугольников на рис. 31?

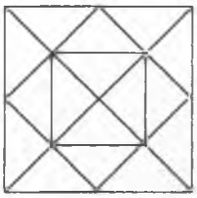


Рис. 30

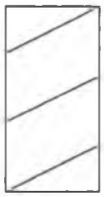


Рис. 31

VI. Домашнее задание. Придумайте свой рисунок, чтобы на нем были отрезки, прямая, 2 луча, окружность с центром и радиусами, сегмент, сектор, треугольники, четырехугольники.

Выполните следующие задачи:

1. На прямой отмечены точки *А, В, С, Д, Е*. Сколько отрезков они определяют?

2. Сколько различных квадратов с вершинами в данных точках можно изобразить на рис. 32?

Рис. 32

ЗАНЯТИЕ 4. ОБМАН ЗРЕНИЯ. СОФИЗМЫ. КОНТРПРИМЕР

I. Для проверки домашнего задания учащимся предлагается обменяться с товарищами по парте придуманными чертежами и найти всевозможные

элементы на них.

II. Рассмотрение неоднозначных рисунков.

На доске вывешены плакаты с картинками (рис. 33 – 37). Эти рисунки относятся к *неоднозначным* фигурам.

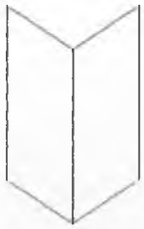


Рис. 33

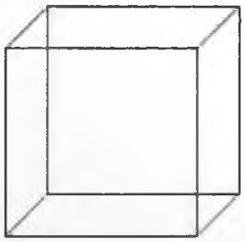


Рис. 34

Рис. 35

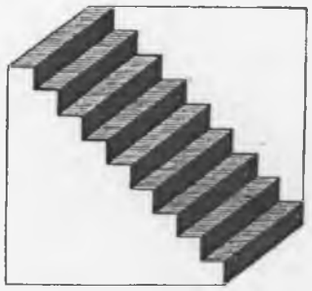


Рис. 36

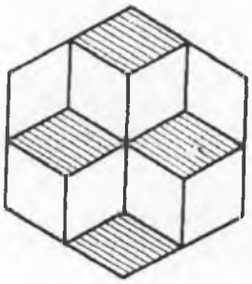


Рис. 37

Задание. Внимательно присмотритесь к этим картинкам и скажите, что вы видите? Сколько различных объяснений вы найдете для каждой из них? С какой стороны мы смотрим на этот каркасный куб, изображенный на рис. 34?

Фигура, изображенная на рис. 36, может представляться трояко:

1) в виде лестницы;

2) в виде ступенчатой ниши;

3) в виде бумажной полосы, согнутой «гармошкой» и протянутой наискось.

Эти представления могут сменять одно другое непроизвольно или по вашему желанию.

Сколько кубиков вы видите на рис. 37? При продолжительном рассматривании фигуры, изображенной на рис. 37, будут казаться

выступающими вперед поочередно то два куба вверху, то два куба внизу. Можно и по произволу, усилием воображения, вызывать то или иное представление.

III. Обманы зрения

Далее учитель показывает ребятам рисунки и задает вопросы.

– Сравните длины двух отрезков, изображенных на рис. 38.

– Конечно, вертикальный длиннее.

– А сейчас? Учитель показывает рис. 39.

– Левый длиннее.

– А вот два параллелограмма (рис. 40), и в каждом из них проведена диагональ. Сравните их.

– Нижняя диагональ длиннее.

Рис. 38

Рис. 39

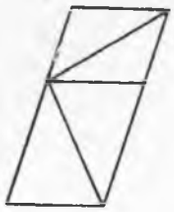


Рис. 40

Затем учитель предлагает одному ученику выйти к доске и измерить все сравниваемые отрезки с помощью линейки. Оказалось, что на каждом из этих чертежей длины сравниваемых отрезков равны.

Учитель показывает еще несколько чертежей (рис. 41 – 44) и просит установить прямые или кривые линии на этих рисунках.

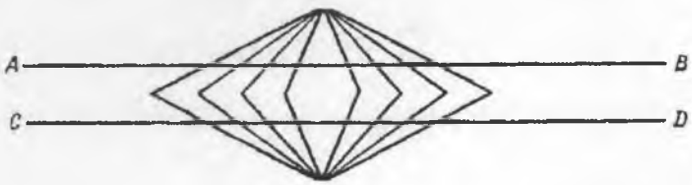


Рис. 41

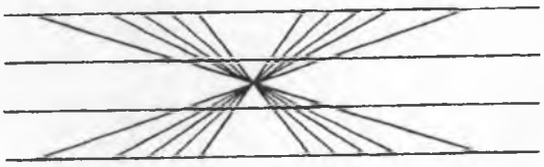


Рис. 42

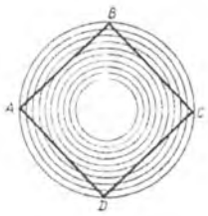


Рис. 43

Рис. 44

Рассматриваются следующие примеры на обман зрения.

Примеры

1. Отрезок *bc* кажется длиннее отрезка *ab*, хотя на самом деле они равны (рис. 45).

Рис. 45

2. Расстояние *АВ* кажется больше равного ему расстояния *СД* (рис. 46).

3. Нижний овал кажется больше внутреннего верхнего, хотя они одинаковы (влияние обстановки) (рис. 47).

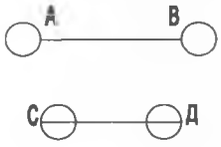


Рис. 46

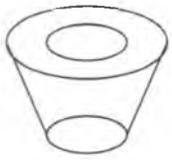


Рис. 47

4. Равные расстояния *AB, CD* и *EF* кажутся неравными (влияние обстановки) (рис. 48).

5. Прямоугольник, прочеркнутый вдоль (слева), кажется длиннее и уже равного ему прямоугольника, прочеркнутого поперек (рис. 49).

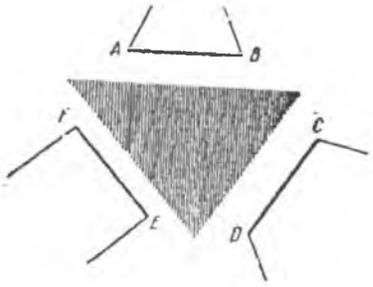


Рис. 48

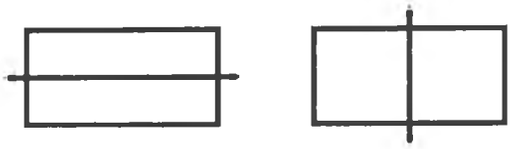


Рис. 49

6. Фигуры А и В – равные квадраты, хотя первая кажется выше и уже

второй (рис. 50).

7. Высота фигуры (рис. 51) кажется больше ее ширины, хотя они равны.

Рис. 50

Рис. 51

8. Высота цилиндра (рис. 52) кажется больше его ширины; между тем они равны.

9. Отрезки *BA* и *BC* равны, хотя первый кажется длиннее (рис. 53).

10. Отвесная узкая полоса кажется длиннее лежащих под нею широких; в действительности они равны (рис. 54).

11. Если продолжить обе правые дуги, они встретят концы левых дуг, хотя кажется, что они пройдут ниже (рис. 55).

Рис. 52

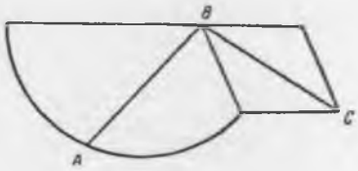


Рис. 53

Рис. 54

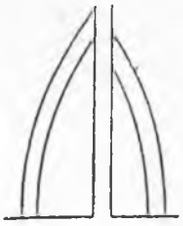


Рис. 55

12. Косая прямая линия, пересекающая черные и белые полоски, издали кажется изломанной (рис. 56).

13. Точка *C*, лежащая на продолжении прямой *AB*, кажется расположенной ниже (рис. 57).

14. Длинные косые параллельны, хотя кажутся расходящимися (рис. 58).

15. Верхний силуэт кажется длиннее нижнего, хотя они равны по длине (рис. 59).

16. Нижняя дуга кажется выпуклее и короче верхней. Между тем обе дуги одинаковы (рис. 60).

Рис. 56

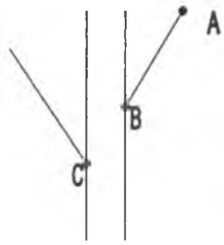


Рис. 57

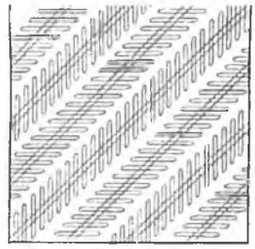


Рис. 58

Рис. 59

17. Поместится ли изображаемый здесь (рис. 64) кружок между прямыми *AB* и *CD*? На глаз кажется, что поместится. В действительности же кружок шире расстояния между этими прямыми.

Рис. 60

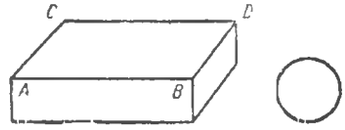


Рис. 61

Затем, подводя итоги всего увиденного, обсуждается вопрос: «Можно ли доказывать чертежами теоремы? Не могут ли наши глаза обманывать нас?».

IV. Теория перспективы

Обсуждение с учащимися такого вопроса: «Как изображать трехмерное пространство на плоскости?»

С давних пор люди пытались объемные тела изображать на плоскости так, чтобы их сразу можно было отличить от плоских, чтобы чувствовалась глубина пространства. Была разработана научная теория *перспективы*, позволяющая «обмануть» зрение. Картина венгерского художника Виктора Вазарели «Изучение перспективы» – прекрасный тому пример (рис. 62). На ней видно, как линии, уходящие вглубь, сходятся в одной точке, а фигура, находящаяся дальше от нас, изображается в виде фигуры меньших размеров.

На рис. 63-64 Вазарели с помощью изгибов линий удалось передать вмятины, выпуклости, капли на плоском листе бумаги.

Рис. 62. В. Вазарели. Изучение перспективы

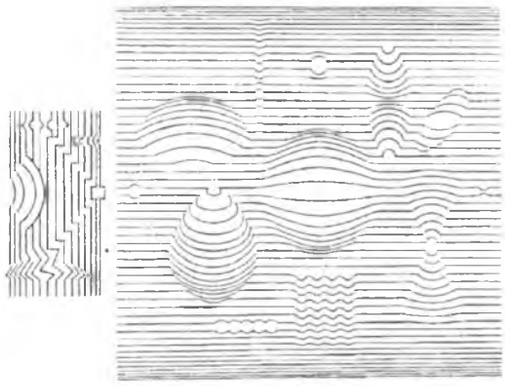


Рис. 63

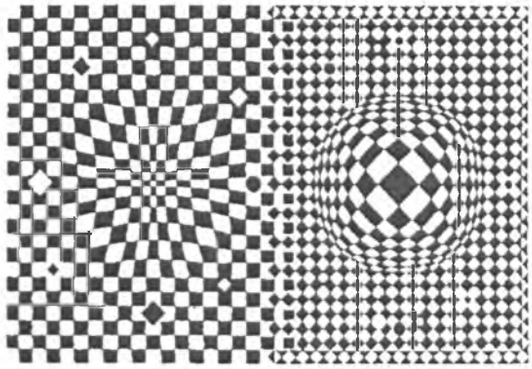


Рис. 64

V. Знакомство с софизмами

Определение. *Софизмом* называется умышленно ложное умозаключение, которое имеет видимость правильного.

Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в математических софизмах выполняются «запрещенные» действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил. Иногда рассуждения ведутся с использованием ошибочного чертежа или опираются на приводящие к ошибочным заключениям «очевидности». Встречаются софизмы, содержащие и другие ошибки.

Для примера учитель «доказывает» две теоремы. Эти «доказательства» должны предостеречь учащихся от некоторых опасностей, таящихся на пути познания и овладения геометрией.

Первая опасность: опора на неверный чертеж.

Теорема. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна катету.

«Доказательство». Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC. Проведем биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к BC (рис. 65). Обозначим через K точку их пересечения. Опустим из K перпендикуляры KM и KP на катет AC и гипотенузу AB.

По свойству биссектрисы точка K равноудалена от AB и AC, то есть $KM = KP$. Прямоугольные треугольники AKM и AKP равны: гипотенуза AK у них общая и $KM = KP$. Значит, $AM = AP$.

Треугольники CKM и BKP также равные прямоугольные: $CK = BK$, поскольку K лежит на серединном перпендикуляре к BC, и $KM = KP$. Значит, $CM = BP$. В результате получаем $AC = AM + CM = AP + BP = AB$. Равенство доказано.

На другом рис. 66 проиллюстрировано доказательство для случая, когда точка K находиться вне треугольника ABC. В чем здесь дело?

Учитель предлагает учащимся сделать аккуратный чертеж (рис. 67), после чего все становится на свои места. Треугольники CKM и BKP и в самом деле равны. Но отрезки CM и BP располагаются по разные стороны от BC. Вот и все.

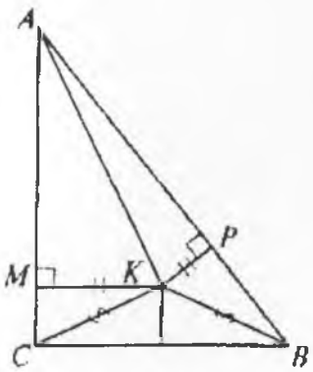


Рис. 65

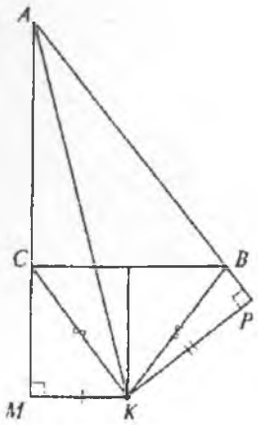


Рис. 66

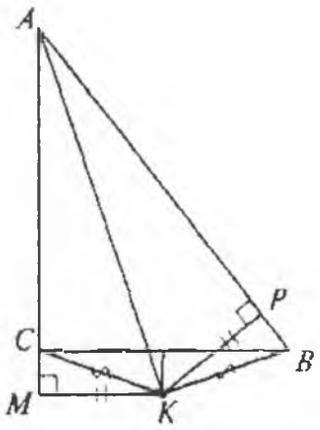


Рис. 67

Вторая опасность: что-то прозевать. «Доказывается» еще одно утверждение «Четвертый признак равенства треугольников».

Теорема. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то такие треугольники равны.

«Доказательство». Построим треугольник AB_2C, равный треугольнику $A_1B_1C_1$, причем расположим точку B_2 по другую сторону от AC, чем точка B. $AB_2 = A_1B_1 = AB$, $CB_2 = C_1B_1$ (рис. 68).

В треугольнике BAB_2 стороны AB и AB_2 равны. Следовательно, равны и углы ABB_2 и AB_2B. Но поскольку по условию углы ABC и AB_2C равны ($\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$), то равными оказываются и углы CBB_2 и AB_2B. Значит, треугольник CBB_2 равнобедренный и $CB_2 = CB$. Теперь треугольники ABC и AB_2C оказываются равными по третьему признаку равенства треугольников, т. е. треугольники ACB и $A_1B_1C_1$ равны.

Практически ничего не меняется, если точка A оказывается по другую сторону от прямой BB_2 (рис. 69).

А здесь в чем дело? Оказывается, что нами упущен один, на первый взгляд, малозначительный случай, когда точки B, B_2 и C оказываются на одной прямой (рис. 70). Именно в этом случае наши рассуждения и не проходят.

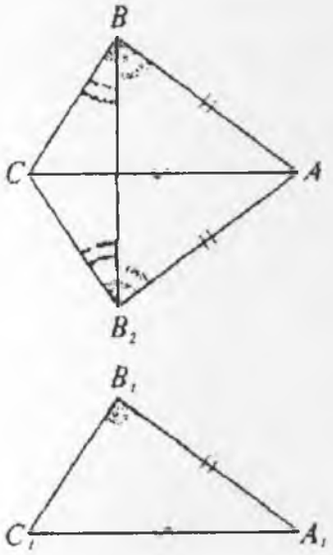


Рис. 68

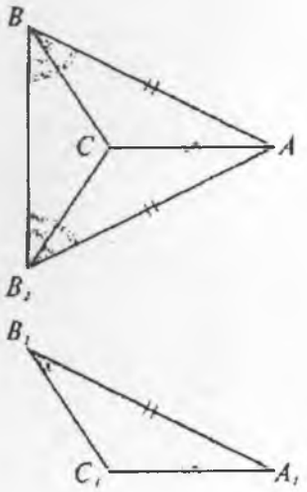


Рис. 69

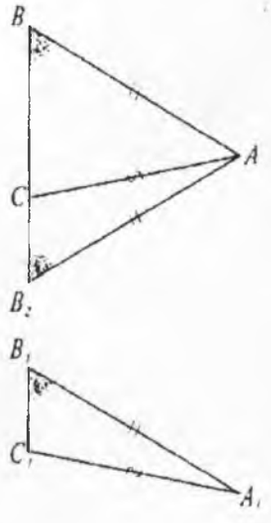


Рис. 70

Вывод: надо быть всегда внимательным и бдительным. Все опасности заранее предусмотреть нельзя, и не только в геометрии.

VI. Учащимся предлагается самостоятельно решить следующий софизм.

Задание. Решите софизм «64 = 65». Квадрат со стороной 8 клеток разрезанный на четыре части (рис. 71). Из этих частей составлен прямоугольник. Основание этого прямоугольника оказалась равным 13 клеткам, а высота – 5 клеткам. Площадь данного квадрата равна 64 квадратным клеткам, а прямоугольника, который получен из него – 65 квадратным клеткам. Получается, 64 = 65. Объясните, в чем тут дело?

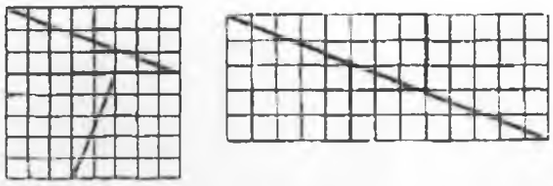


Рис. 71

Учитель может посоветовать перерисовать квадрат на клетчатый лист бумаги, разрезать его по указанным частями и попробовать составить прямоугольник, как показано на рис. 71.

VII. Рассматривается эвристические приемы ***контрпример*** и ***подтверждающий пример***.

Иногда возникает вопрос: Каким образом можно опровергнуть неверное утверждение, теорему? Одним из наиболее распространенных способов является построение опровергающего примера – контрпримера.

Способ опровержения с помощью контрпримера применяется не только в математике. Он часто используется в самых различных науках и даже в обычной жизни. Если кто-либо утверждает, что птицы отличаются от других животных наличием крыльев, то можно, в качестве контрпримера указать на бескрылую птицу киви, живущую в Новой Зеландии, или же на известных всем летучих мышей.

В качестве примера рассматривается такая задача.

Задача. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 72) имеют место равенства $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Обязательно ли такие треугольники равны?

Для того чтобы доказать, что такие треугольники могут и не быть

равными, достаточно предъявить два неравных треугольника, у которых равны указанные в условии элементы. Как говорят математики, построить опровергающий пример.

Решение. Рассмотрим на плоскости какой-нибудь острый угол, вершину которого обозначим буквой B (рис. 73). Возьмем на одной из его сторон точку A и с центром в A нарисуем окружность, которая пересекает другую сторону угла в двух точках. Обозначим эти точки через C и C_1. Один из двух треугольников – это ABC, а другой – ABC_1 (можно считать, что точки A и A_1, B и B_1 совпадают). Как видим, эти треугольники не равны, хотя и удовлетворяют всем условиям нашей задачи.

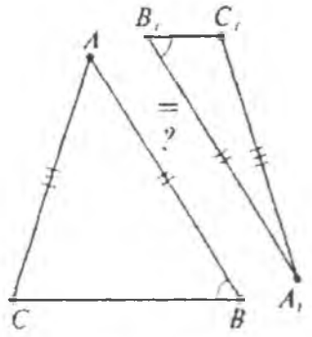


Рис. 72

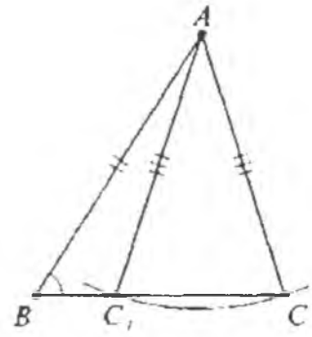


Рис. 73

Итак, в задаче приводится пример, показывающий, что два треугольника, у которых есть две пары равных сторон и пара соответствующих равных углов, могут и не быть равными.

Однако этот пример оказывается невозможным, если рассматриваемый угол не острый.

VIII. Учащимся для решения предлагаются упражнения на применение вышерассмотренных эвристик.

Задачи и упражнения

1. В математических рукописях XVIII в. можно встретить утверждение, что фигуры с равными периметрами ограничивают равные площади. Верно ли это? Приведите примеры.

2. Может ли быть треугольник с очень большими сторонами и очень маленькой площадью? Приведите пример.

К следующим задачам предлагается построить опровергающий пример (контрпример). Суть этих задач заключается в своеобразном расхождении словесной формулировки и соответствующего чертежа. Чертеж дан в таком виде, что он наталкивает на неправомерное ограничение, которое в словесной формулировке отсутствует. Задачи предъявляются учащимся в словесной формулировке совместно с чертежом. Под номерами 3*а*-9*а* даются словесные пояснения и вторые варианты чертежей.

3. Даны две фигуры, у которых основания равны и высоты равны. Равны ли их площади (рис. 74)?

3*а*. Но фигуры-то могут быть разные (рис. 75).

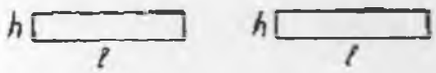


Рис. 74

Рис. 75

4. Даны два острых угла. Будут ли они вертикальными (рис. 76)?

4*а*. Разве только вертикальные углы равны (рис. 77)?

Рис. 76

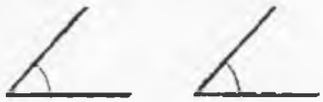


Рис. 77

5. Даны два угла. Каждый из них равен 90^0. Будут ли они смежными (рис. 78)?

5*а*. Разве прямые углы всегда смежные (рис. 79)?

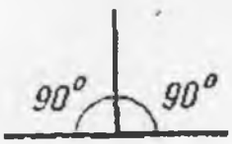


Рис. 78

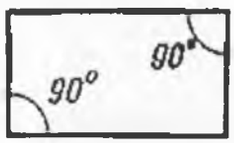


Рис. 79

6. Оцените правильность утверждения, что перпендикуляр короче любой наклонной (рис. 80).

6*а*. Но ведь перпендикуляр и наклонная могут быть проведены

не из одной и той же точки (рис. 81).

Рис. 80

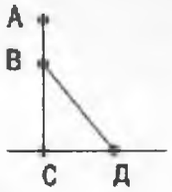


Рис. 81

7. Оцените правильность утверждения, что против равных углов лежат равные стороны (рис. 82).

7*а*. А если равные углы входят в состав различных фигур (рис. 83)?

Рис. 82

Рис. 83

8. Можно ли в некоторых случаях одну и ту же часть круга одновременно называть и сектором, и сегментом (рис. 84)?

8*а*. А как с этой точки зрения можно назвать полукруг (рис. 85)?

9. Оцените правильность утверждения, что всякая хорда короче диаметра этой же окружности (рис. 86).

9*а*. А если хорда проходит через центр (рис. 87)?

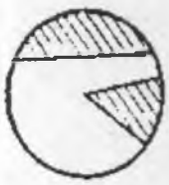


Рис. 84

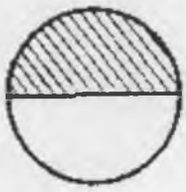


Рис. 85

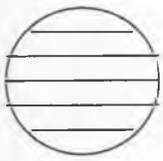


Рис. 86

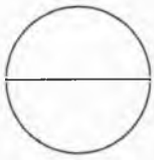


Рис. 87

IX. Домашнее задание. Придумайте и нарисуйте свою картинку с кажущимися выпуклостями и вмятинами на листе бумаги.

ЗАНЯТИЕ 5. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА. ОПЫТЫ С ЗЕРКАЛАМИ

I. Проводится исследовательская работа учащихся с зеркалами.

Ежедневно каждый из нас по несколько раз в день видит свое

отражение в зеркале. Это настолько обычно, что мы не удивляемся, не задаем вопросов и вообще не обращаем внимания на зеркало и прочие пустяки. И только философы и математики не теряют способности удивляться. Вот что написал немецкий философ Эммануил Кант о зеркальном отражении: «Что может быть больше похоже на мою руку или мое ухо, чем их собственное отражение в зеркале? И все же руку, которую я вижу в зеркале, нельзя поставить на место настоящей руки…»

Исследовательская работа. Опыты с зеркалами

Цель работы: исследовать, что меняется в предмете при его отражении в зеркале; подметить особенности зеркального отражения и сделать из каждого опыта выводы. Выводы записать в тетради.

Приборы и материалы: два небольших зеркальца.

Задания

1. Напишите свое имя печатными буквами в столбик и посмотрите на его отражение в зеркале. Поворачивает ли зеркало ваше имя? А имя ЮРА? Чем отличаются записи МАША и РОМА? Полоски с именами расположите параллельно поверхности зеркала.

2. Проверьте, меняет ли зеркало местами:

а) левую и правую стороны, верх и низ, предметы спереди и сзади вас, если вы стоите лицом к зеркалу? А если вы встанете к зеркалу боком?

б) последовательность предметов, лежащих на столе, если поверхность стола перпендикулярна зеркалу?

3. Представьте себя стоящим на зеркальном полу. Что меняется местами?

4. На полоске бумаги горизонтально печатными буквами написаны слова ЧАЙ и КОФЕ. Положите эту полоску перед зеркалом на стол. Почему зеркало не перевернуло слово КОФЕ и до неузнаваемости изменило слово ЧАЙ?

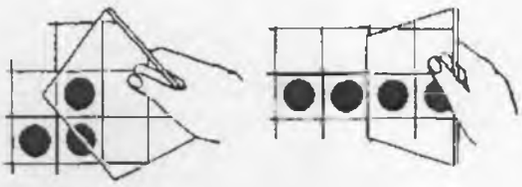
5. Поставьте два зеркала под прямым углом друг к другу. Поменялись ли на изображении местами правая и левая стороны? В зеркалах, стоящих

перпендикулярно друг другу, мы видим себя такими, какими видят нас другие люди. Почему? А какое изображение получится, если линия соединения зеркал будет горизонтальной?

6. Отражения пятен

1). Если поставить зеркало сбоку от этих двух пятен (рис. 88), можно увеличить их число до трех (рис. 89, *а*) или четырех (рис. 89, *б*). Какие другие расположения вам удастся обнаружить?

Рис. 88



а) *б*)

Рис. 89

2). Попробуйте увеличить число пятен на рис. 90. Сколько разных расположений вы можете найти? Какое наибольшее число пятен вы можете создать?

Рис. 90

Что произойдет, если начать с четырех пятен? С пяти пятен? Попробуйте поиграть с разными начальными расположениями пятен?

II. Домашнее задание. Учащимся предлагается продолжить исследовательскую работу дома. Учитель напоминает учащимся о волшебных картинках в калейдоскопе, которые меняются от малейшего поворота. Они тоже получены путем отражения в нескольких зеркалах мелких кусочков разноцветного стекла.

Задание

1). Сделайте свой калейдоскоп из двух плоских зеркал, поставленных на лист белой бумаги под углом друг к другу. На листе между зеркалами

нарисуйте какую-нибудь фигуру или произвольную линию. Измените угол между зеркалами. Сколько раз зеркала отражаются друг в друге?

2). Как зависит рисунок в вашем калейдоскопе от угла между зеркалами? Сравните рисунки, если угол между зеркалами равен 30^0, 45^0, 90^0, 120^0 (эти углы начертите с помощью транспортира на листе бумаги под зеркалами). Попробуйте зарисовать их в тетради. Какой рисунок вам понравился больше всего?

3). Попытайтесь прочитать книгу, глядя не в нее, а в ее отражение в зеркале. Удастся ли вам написать хоть строку, глядя не на лист бумаги, а на его зеркальное отражение?

ЗАНЯТИЕ 6. ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

I. В начале занятия учащиеся сдают тетради со своими выводами и наблюдениями о проделанной работе. Устно подводятся некоторые итоги.

II. Опыты с зеркалами позволили прикоснуться к удивительному математическому явлению – симметрии. В древности слово «симметрия» употреблялось в значении «гармония», «красота». Действительно, в переводе с греческого это слово означает «соразмеренность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей».

III. Осевая симметрия

Демонстрация фигур, обладающих осевой симметрией.

На рис. 91 изображены бабочка, мотылек, снежинка и кленовый лист. Их объединяет то, что они симметричны. Если поставить зеркальце вдоль прочерченной на каждом рисунке прямой (рис. 91), то отраженная в зеркале половинка фигуры дополнит ее до целой (такой же, как исходная фигура). Поэтому такая симметрия называется *зеркальной* (или осевой). Прямая, вдоль которой поставлено зеркало, называется *осью симметрии*. Если симметричную фигуру сложить пополам вдоль оси симметрии, то ее части совпадут.

Отражения букв

Если поставить зеркало сбоку от буквы *А* (рис. 92), в зеркале можно

увидеть ту же самую букву. Но если поставить зеркало снизу, отражение уже не похоже на *А* – это *А* вверх дном (рис. 93).

Рис. 91

А вот если поставить зеркало снизу буквы *В* (рис. 94), отражение выглядит так же. Зато, поставив зеркало сбоку от нее, получим *В* задом наперед (рис. 95).

Рис. 92 Рис. 93 Рис. 94 Рис. 95

Буква *А* имеет вертикальную симметрию, буква *В* – горизонтальную.

Задание. Какие буквы русского алфавита имеют горизонтальную или вертикальную симметрию? Какие буквы имеют и ту, и другую? Есть ли такие буквы, отражение которых не изменится, где бы ни поместить зеркало?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О

П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы ЬЭЮЯ

Далее вместе с учащимися воспроизводятся некоторые сведения о симметрии.

Определение. Две точки называются *симметричными* относительно некоторой прямой, если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой до совпадения одной части чертежа с другой эти точки совмещаются.

Определение. Точки *А* и *А*' называются симметричными относительно прямой *MN*, если отрезок *АА*' перпендикулярен прямой *MN* и делится этой прямой пополам (рис. 96).

Прямая *MN* называется *осью симметрии* точек *A* и *A*', а сама симметрия – *осевой симметрией*.

Построение симметричных фигур

Симметричные фигуры можно получать с помощью следующего приема. Проведем в плоскости чертежа некоторую прямую *l* и по одну сторону от нее начертим какую-нибудь фигуру. Приставим затем к прямой *l* край зеркала, перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 97). В зеркале мы увидим вторую фигуру, симметричную первой относительно прямой *l*.

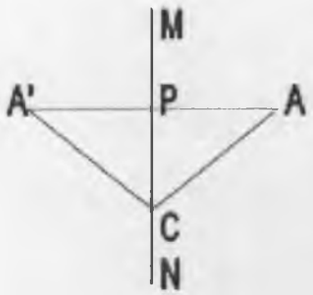


Рис. 96

Рис. 97

Указанный прием позволяет выполнять построение на глаз. А как точно нарисовать отражение фигуры в зеркале?

Представим, что *l* – зеркало (или ось симметрии). Построим отражение ломаной *ABC* (рис. 98).

1). Из вершин *A* и *B* опускаем перпендикуляры на прямую *l*.

2). Продолжаем их «за зеркало» на такое же расстояние (равное длине соответствующего отрезка).

3). Соединим полученные точки. Ломаная $A_1B_1C_1$ – отражение *ABC*. Точка *C* осталась на месте. Она лежит на оси симметрии.

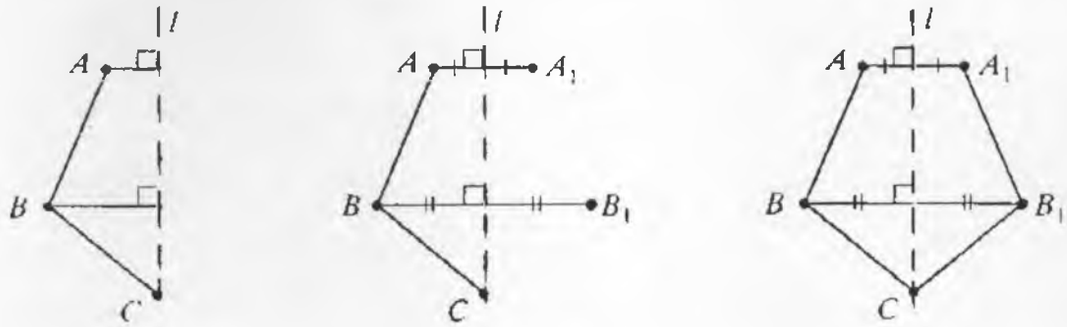


Рис. 98

Две симметричные фигуры можно совместить одну с другою, перегнув плоскость чертежа по оси симметрии.

Задание. Мысленно перегибая бумагу, определите, сколько осей симметрии имеет каждая из фигур, показанных на рис. 99, проведите в них всевозможные оси симметрии. Как расположены оси симметрии, если их больше двух?

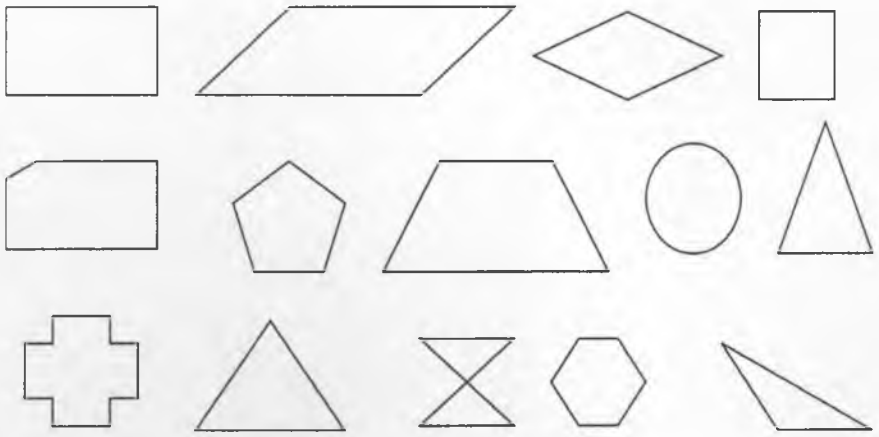


Рис. 99

Какая из изображенных фигур «самая симметричная»? Какая «самая несимметричная»?

Вырезание симметричных фигур из бумаги (перегнуть листок и вырезать любую фигуру).

Задание

1. Пусть два зеркала поставлены параллельно друг другу отражающими поверхностями внутрь. Между ними на бумаге нарисована некоторая линия. Нарисуйте отражение этой линии в каждом из зеркал.

2. Два зеркала стоят перпендикулярно друг другу. Между ними нарисована кривая, идущая от зеркала к зеркалу. Сколько раз отразится кривая в зеркалах? Сколько осей симметрии имеет полученная фигура? Проделайте опыт.

3. Постройте фигуру, получающуюся при отражении заданного отрезка в изображенных на рис. 100, *а* – *г* зеркалах. Сколько осей симметрии у каждой из получившихся фигур?

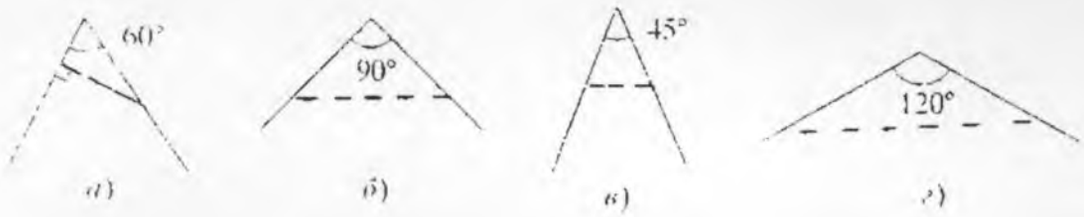


Рис. 100

Фигуры, симметричные относительно прямой

Предположим, что на плоскости, кроме прямой l, задана некоторая фигура F, например отрезок, кривая линия, окружность, треугольник, трапеция или какая-либо иная фигура. Возьмем произвольную точку A фигуры F и найдем точку A', симметричную точке A относительно прямой l (рис. 101). Затем возьмем точку B фигуры F и найдем симметричную ей точку B'; потом возьмем тоску C фигуры F и симметричную ей точку C' и т. д. Рассмотрим всевозможные точки A', B', C', …, симметричные точкам A, B, C, … фигуры F, или как говорят в математике, множество всех точек, симметричным точкам фигуры F относительно прямой l. Это множество, состоящее из точек A', B', C', …, представляет собой некоторую фигуру F'; на рис. 101 фигура F' изображена пунктиром. Фигуру F' называют фигурой, симметричной фигуре F относительно прямой l.

Определение. Фигура F', образованная всеми точками, симметричными точкам фигуры F относительно прямой l, называется фигурой, симметричной фигуре F относительно прямой l.

Понятно, что симметричные фигуры равны.

Если для каждой точки какой-либо фигуры построить ей симметричную относительно некоторой оси, то все построенные таким образом точки образуют новую фигуру, которая называется *симметричной* с данной относительно оси.

На рис. 102 представлено построение фигуры, симметричной с фигурой листа березы, причем построены лишь те точки новой фигуры, которые необходимы, чтобы обрисовался ее контур.

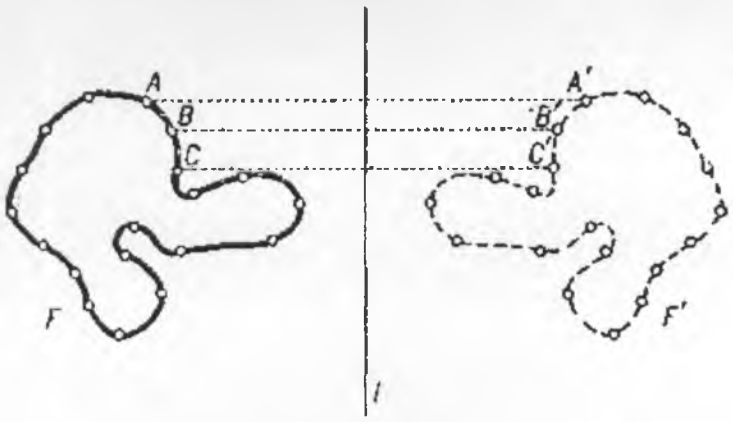


Рис. 101

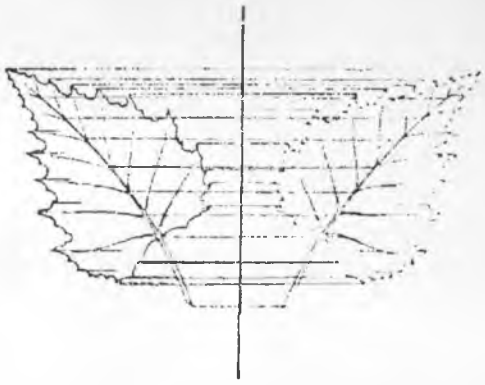


Рис. 102

IV. Можно предложить учащимся выполнить небольшую самостоятельную работу.

Самостоятельная работа «Построение симметричных фигур на миллиметровой бумаге»

С помощью линейки проведите карандашом прямую l, совпадающую с одной из жирных линий, намеченных на миллиметровой бумаге. По одну сторону от проведенной прямой изобразите какую-либо фигуру F и поменяйтесь чертежами с соседом по парте. Для фигуры F, которую нарисовал ваш сосед, постройте симметричную ей фигуру F' относительно прямой l (это легко сделать, используя деления миллиметровой бумаги).

V. Учащимся предлагается выполнить следующие упражнения.

Задачи и упражнения

1. Какие из следующих букв А, Б, В, Г, Д, Е, К имеют ось симметрии?

2. Сколько осей симметрии имеют такие буквы: А, Б, В, Ж, Н, О, Т, Ш?

3. Распределите буквы Г, П, Н, Р, Т, О, И, С, Х по числу осей симметрий на три группы.

4. Может ли фигура иметь бесконечно много осей симметрии?

5. Нарисуйте фигуры, имеющие ровно одну, ровно две, три и четыре оси симметрии.

6. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь четырехугольник?

7. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

8. Какое наибольшее число различных сторон может быть в шестиугольнике, имеющем ось симметрии?

9. На листе бумаги изображены три точки A, B и C. С помощью перегибания листа бумаги, без помощи каких бы то ни было геометрических инструментов, отметьте:

а) центр вписанной окружности треугольника ABC;

б) центр описанной окружности треугольника ABC.

10. На листе бумаги отмечены две точки A и B. С помощью перегибания листа бумаги изобразите квадрат со стороной AB.

11. Нарисуйте на плоскости две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте какую-то точку A на плоскости. Изобразите точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a, затем точку A_2, симметричную A относительно прямой b, затем точку A_3, симметричную A_1 относительно b, и A_4, симметричную A_2 относительно a. Рассмотрите несколько случаев расположения точки A.

12. Дана прямая a и точка A вне этой прямой. Докажите, что через A можно провести прямую, параллельную a.

VI. Центральная симметрия

Определение. Точка A называется *симметричной* точке A_1 относительно точки O, если отрезок AA_1 проходит через точку O и делится этой точкой пополам. Точка O называется *центром симметрии* данных точек, а сама симметрия называется *центральной симметрией*.

Чтобы построить точку, симметричную с данной точкой A относительно другой данной точки O, следует соединить точки A и O отрезком прямой и продолжить его за точку O на расстояние OA', равное OA. Точка A' будет искомой.

Если для каждой точки какой-либо фигуры построить точку, ей симметричную относительно некоторого центра O, то все построенные таким образом точки образуют новую фигуру, которая называется *симметричной данной относительно центра* O, или, коротко *центрально-симметричной*

данной.

Определение. Фигура F', образованная всеми точками, симметричными точкам фигуры F относительно данной точки O, называется фигурой, симметричной фигуре F относительно точки O.

Каждые две центрально-симметричные фигуры равны между собой.

Действительно, легко заметить, что всякие две центрально-симметричные фигуры могут быть совмещены одна с другой путем вращения одной из них вокруг центра симметрии на угол 180^0.

Задание

Приведите примеры плоских фигур, имеющих центр симметрии, но не имеющих оси (осей) симметрии. А теперь, наоборот, – фигур, имеющих ось (или оси) симметрии, но не имеющих центра симметрии.

Как проверить является ли фигура центрально-симметричной или нет? Это можно проверить с помощью обычной иголки и кальки. Наложим на нашу фигуру кальку. Проколов фигуру в предполагаемом центре и обведя ее контур, надо повернуть фигуру на 180^0 вокруг иголки. Если фигура «вошла» в свой контур, то она центрально-симметрична (рис. 103).

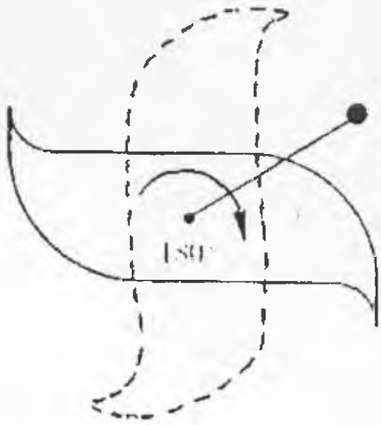


Рис. 103

VII. Учащимся предлагается выполнить следующие упражнения.

Задачи и упражнения

1. Вырежьте из бумаги круг и с помощью перегибаний определите центр круга.

2. Определите, имеют ли центр симметрии следующие фигуры: отрезок, прямая, квадрат, ромб, прямоугольник, параллелограмм, окружность, круг, пара параллельных прямых, правильный пятиугольник?

3. Какие буквы русского алфавита имеют центр симметрии?

4. Назовите буквы английского алфавита, обладающие центральной симметрией.

5. Выберите из множества цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} те, которые имеют центр симметрии.

6. Фигура, изображенная на рис. 104, имеет точку O центром симметрии. Какие линии можно убрать, чтобы оставшаяся фигура имела точку O своим центром симметрии?

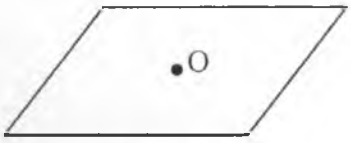


Рис. 104

7. Какой четырехугольник имеет лишь: 1) одну ось симметрии; 2) центр симметрии; 3) центр и две оси симметрии; 4) центр и четыре оси симметрии?

8. Даны две прямые a и b. Как установить, параллельны ли они?

9. На прямой даны точки A, B и C, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$. Изобразите на прямой точки A, B и C, а также точки, симметричные любой из них относительно каждой из двух других. (Например, симметричные A относительно B и C.)

10. На прямой даны две точки: A и B, причем $AB = 1$. Пусть M – некоторая точка прямой, M_1 симметрична M относительно A, M_2 симметрична M_1 относительно B. Изобразите точки M, M_1, M_2, если: *а*) M – середина AB; *б*) $AM = 3$, $BM = 2$; *в*) $AM = 0{,}3$, $BM = 1{,}3$. Для всех случаев найдите длину отрезка MM_2.

11. Точка M симметрично отображается относительно точки A, а полученная точка симметрично отображается относительно точки B. В результате этих двух симметрии M переходит в M'. Докажите, что $MM'=2AB$. (Выражение «точка M симметрично отображается относительно точки A» означает, что M переходит в точку M_1 такую, что A – середина MM_1.)

Указание. Рассмотрите несколько случаев расположения точки на прямой AB (M – внутри AB, M – вне AB, но «близко» к A и др.). Проследите за ее перемещением после каждой симметрии, сделайте соответствующие рисунки.

12. Нарисуйте произвольный треугольник и отметьте точку *O*. Постройте треугольник, симметричный изображенному относительно точки *O*.

13. Выполните предыдущее задание, взяв вместо треугольника четырехугольник, затем окружность.

14. Даны две окружности разных радиусов и с разными центрами. Постройте прямую, являющуюся осью симметрии обеих окружностей.

15. На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке *O*. Последовательно отражая точку *A* относительно одной из этих прямых, а затем полученную точку относительно другой, получим точку A_1. Докажите, что точки *A* и A_1 симметричны относительно точки *O*.

VIII. Домашнее задание. Найдите и запишите как можно больше симметричных предметов, сооружений в окружающей обстановке дома и на улице. Напишите небольшое «научное» сочинение (рассказ) на тему: «Симметрия в моей жизни» или «Симметрия в природе».

ЗАНЯТИЕ 7. СИММЕТРИЯ. «МЕТОД СИММЕТРИИ» В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ

I. Для проверки домашнего задания в начале занятия проводится конкурс. Класс делится на две команды. Задание общее обеим командам: написать как можно больше симметричных предметов, сооружений в окружающей обстановке классной комнаты. На выполнение задания отводится 5 минут. Затем учащиеся каждой из команд поочередно называют свои слова, причем слова не могут повторяться командами. Выигрывает команда, назвавшая наибольшее число неповторяющихся слов.

Или можно предложить учащимся игру-конкурс букв и слов:

а) назовите буквы, имеющие одну, две оси симметрии;

б) составьте слова, имеющие ось симметрии (горизонтальную или вертикальную), например, ТОПОТ, СОН.

II. Далее рассматривается такой эвристический прием как ***использование симметрии***. Вместе с учащимися осваивается ***«метод симметрии»*** при решении задач.

В общем понимании целое считается симметричным, если у него имеются взаимозаменяемые части. Существует много видов симметрии, некоторые из них были нами рассмотрены. Они отличаются друг от друга числом взаимозаменяемых частей и теми действиями, при помощи которых эти части взаимозаменяются. В результате симметрия становится мощным средством математических исследований, помогает решать трудные задачи. Если в задаче имеются симметричные элементы, то, учитывая это, порой бывает выгодно обратить внимание на эти взаимозаменяемые части и часто имеет смысл применять одинаковые подходы к тем элементам, которые выполняют одни и те же функции. А для того, чтобы освоить «метод симметрии», нужно вспомнить основные свойства симметрии.

Свойства симметрии

1. Если точка A_1 симметрична точке A относительно прямой a, то для любой точки B на этой прямой отрезки A_1B и AB равны.

2. Для любой точки плоскости всегда можно построить симметричную ей точку относительно некоторой прямой.

3. Отрезок, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам.

4. Если отрезки M_1N_1 и MN симметричны относительно прямой a, то их длины равны.

Из этих свойств симметрии следует важное *свойство плоскости:*

Если A – некоторая точка плоскости, а B – точка на прямой l, то длина отрезка AB будет наименьшей, если отрезок AB перпендикулярен l.

Иными словами, кратчайшим путем от точки до прямой является путь по перпендикуляру к этой прямой.

III. Для примера разбирается классическая задача геометрии и входящая в ее золотой фонд.

Задача. Туристы разбили палатку в пункте A, расположенном недалеко от берега l реки. В другом пункте B находится костер. Одному из туристов предстоит взять в палатке ведро, наполнить его водой на реке и принести к костру. Берег реки считается строго прямолинейным, никаких препятствий на местности нет. Спрашивается, какой путь будет наиболее выгодным для туриста (т. е. самым коротким)?

Совет. Переформулируйте данную задачу.

В результате получим такую задачу: «Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку M, чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшей».

Решение. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно прямой l (рис. 106). Тогда для любой точки N прямой l мы имеем $NB = NB'$, и потому $AN + NB = AN + NB'$. Таким образом, сумма $AN + NB$ равна длине ломанной ANB'. Следовательно, наименьшую величину сумма расстояний $AN + NB$ будет иметь в том случае, если наименьшую длину будет иметь ломаная ANB'. Но это будет в том случае, когда ломаная ANB' обратится в отрезок прямой, т.е. в случае, когда роль точки N играет точка M пересечения прямой l с отрезком AB'. Эта точка M и является искомой (рис. 105).

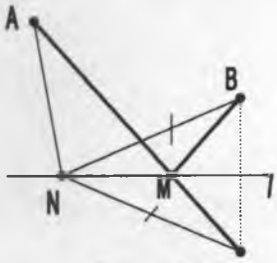


Рис. 105

IV. Учащимся для решения предлагаются несколько задач.

Задачи и упражнения

1. На реке расположены два острова A и B. Туристы, отправившись на байдарке от острова A, желают попасть на остров B, побывав поочередно на левом и правом берегах реки. Как они должны проложить свой маршрут, чтобы весь путь имел бы наименьшую длину? (Берега реки – прямые линии.)

2. Внутри острого угла отмечена точка A. Найдите на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был бы наименьшим.

Известно, что окружность самая симметричная фигура. Многие ее свойства следуют из того, что она симметрична относительно любого своего диаметра. Объясните (докажите) следующие два свойства окружности.

3. Две параллельные прямые пересекают окружность. Рассмотрите на окружности две дуги, лежащие между этими прямыми. Оказывается, эти дуги всегда равны. Почему?

Указание. При решении задачи можно руководствоваться такими эвристиками: «сделай рисунок», «введи подходящие обозначения», «выполни дополнительные построения». Воспользуйтесь тем, что осью симметрии окружности является ее диаметр.

4. Возьмем окружность и точку A вне ее. Из этой точки к окружности можно провести две касательные. Пусть одна касается окружности в точке B, а другая – в точке C. Имеет место равенство $AB = AC$. Почему?

Указание. Сделайте рисунок, введите подходящие обозначения. Воспользуйтесь четвертым свойством симметрии.

5. На площадке, имеющей форму параллелограмма, размещен участок квадратной формы. Как провести прямую, которая разобьет одновременно и площадку и участок на две равные части?

Задание. Проанализируйте, какую роль сыграла симметрия при решении каждой задачи.

V. Далее проводится **математический бой**, с правилами проведения которого учащиеся ознакамливаются заранее.

Правила математического боя

Учащиеся делятся на две команды, в каждой выбирается капитан. Каждая из двух команд получает список задач, подготовленный учителем. Через время, отведенное для решения этих задач, команды собираются у доски, и начинается собственно математический бой.

Сначала, при помощи конкурса капитанов, определяется очередность

выступления команд. Капитанам одновременно задается какой-либо простой вопрос, на который они должны тут же, у доски, ответить. Как только один из капитанов дает ответ, конкурс заканчивается – если ответ правильный, то команда, давшая его, побеждает, если ответ неверен, автоматически побеждает в конкурсе другая команда.

Победившая команда определяет, какая из команд первой будет вызывать соперников, после чего должен последовать вызов на одну из списка задач. Вызванная команда может принять вызов и выставить одного из своих членов как отвечающего решение этой задачи – тогда вызвавшая команда посылает к доске оппонента, который должен проверять решение. Если же задача не решена, то капитан сообщает об отказе рассказывать решение. В этом случае происходит так называемая «проверка корректности вызова». Решение должна рассказывать вызвавшая команда, вызванная же команда выставляет оппонента. Если же вызвавшая команда не смогла изложить правильное решение – право на вызов переходит к другой команде.

После того, как обсуждение задачи закончилось, учитель, выступающий в роли жюри, распределяет очки, исходя из того, что каждая задача стоит 12 очков. Какую-то долю очков может получить и оппонент, даже если решение отвечающего было верным; оппонент мог найти пробелы в решении, которые затем были исправлены отвечающим. В том случае, когда обнаруженная оппонентом ошибка не была исправлена за некоторое ограниченное время (например, за 1 минуту) и была признана жюри достаточно серьезной, ответ прерывается, и жюри может выслушать оппонента, после чего принять решение о распределении очков.

Если одна из команд отказывается от права на вызов, то другая команда может рассказать решения всех еще не разобранных задач, решенных этой командой (все это происходит с участием оппонента).

Существуют некоторые правила и ограничения:

- штраф за «некорректный» вызов равен 6 очкам;
- каждый из участников боя может выходить к доске (не считая

конкурса капитанов) не более 2 раз;

- вести переговоры с учителем (жюри) может лишь капитан или его временный заместитель;
- последнее слово за учителем.

Список задач для матбоя

1. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Какую стратегию выбрать, чтобы не проиграть?

2. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Какую стратегию выбрать, чтобы не проиграть?

3. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Какую стратегию выбрать, чтобы не проиграть?

4. Столяру принесли 2 одинаковые овальные доски с продолговатым отверстием в центре (рис. 106) и заказали из них одну круглую сплошную крышку для стола. Доски оказались из дерева редкой дорогой породы, и мастеру хотелось употребить их в дело полностью, без каких бы то ни было обрезков.

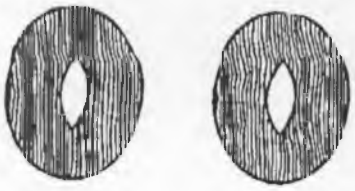


Рис. 106

Чтобы не делать лишних разрезов, столяр сначала вырезал из плотной бумаги выкройку доски, присмотрелся к форме, кое-что проверил циркулем. Оказалось, что намерение мастера вполне осуществимо, и притом с небольшим количеством разрезов каждой доски.

Как распилил столяр принесенные доски?

Перед решением этих задач учитель делает некоторые пояснения. Первые три задачи представляют собой своеобразные задачи-игры на

симметрию.

Определение. Способ игры, обеспечивающий выигрыш одним из игроков в любом случае, как бы не играл его противник, называется *выигрышной стратегией.*

Выигрышная стратегия – это и есть тот секрет успеха, тот «ключ к победе», обладая которым вы можете выиграть у любого, сколь угодно сильного противника.

Учитель обращает внимание ребят, что при решении задач нужно применить «метод симметрии».

VI. В конце матбоя учащимся предлагается проанализировать каждую решенную задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция для решения задачи;

в) что послужило инсайтом для решения задачи.

VII. Домашнее задание. Решите задачи:

1. Как можно было бы при изготовлении праздничной иллюминации красиво разместить 10 лампочек в 5 рядов по 4 лампочки на одной прямой так, чтобы у полученной фигуры были бы центр и ось симметрии?

2. Ученик нарисовал на доске окружность, отметил на ней точки A, B, C и стер ее, оставив лишь эти точки. Как восстановить окружность?

ЗАНЯТИЕ 8. ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

I. Обсуждение домашнего задания.

II. Рассматривается такой эвристический прием как ***перебор вариантов***, основой которого является выявление всех логических возможностей и отбор из них таких, которые удовлетворяют условию задачи. Если логических возможностей, соответствующих условию задачи, конечное число, то может оказаться возможным перебрать все их и в ходе этого перебора выделить вполне удовлетворяющие условию. Нужно стараться

приноровить свои попытки для получения наилучшего результата, и если мы терпим неудачу при рассмотрении одного из вариантов перебора, то мы должны исследовать все остальные. Решая задачи, учащиеся должны рассматривать все возможные варианты заданной в задаче ситуации. Необходимость рассматривать несколько случаев – типичное явление для геометрических теорем и задач.

Важной особенностью многих интересных геометрических задач является их многовариантность. Условие задачи может быть реализовано несколькими различными способами. При решении все эти варианты необходимо рассмотреть, ничего не прозевать. Это в равной степени относится ко всем видам геометрических задач.

Рассматривается пример.

Задача. Найдите радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 8, 9 и 10.

Решение. Сделаем чертеж, введем подходящие обозначения (рис. 107). Ввиду равенства $CE = CD$ окружность с центром в C и радиусом CE проходит и через D. Точно также можно построить окружности с центрами в A и B и проходящие через E и F, D и F. Эти три окружности будут касаться друг друга внешним образом.

Возможны еще три случая – ведь две окружности могут касаться и внутренним образом. Например: окружность с центром A содержит две другие (рис. 108). Если радиус окружности с центром A равен x, то радиусы окружностей с центрами B и C будут соответственно равны $x - 8$ и $x - 10$. Но сумма радиусов двух меньших окружностей равна $BC = 9$. Получаем уравнение $(x - 8) + (x - 10) = 9$, откуда $x = 13{,}5$. Радиусы окружностей в этом случае равны 13,5; 5,5; 3,5.

Задание. Закончите решение самостоятельно. Решите следующие задачи.

Ответ: всего вариантов 4: (4,5; 3,5; 5,5); (13,5; 5,5; 3,5); (5,5; 13,5; 4,5); (3,5; 4,5; 13,5).

III. Выяснение понятий терминов «анализ» и «синтез».

В математике терминами «анализ» (по гречески *analysis* – разложение, расчленение, разбор) и «синтез» (*synthesis* – соединение, составление, объединение) называют два противоположных по ходу движения мысли рассуждения, которые применяются при решении задач и доказательстве теорем.

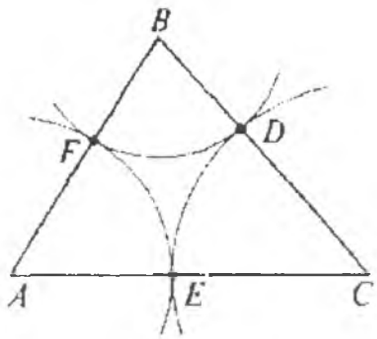


Рис. 107

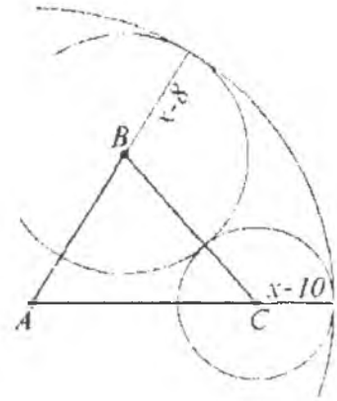


Рис. 108

Определение. *Анализ* – это рассуждение, идущее от того, что надо найти или доказать, к тому, что дано или уже установлено ранее.

Определение. *Синтез* – рассуждение, идущее от данных к неизвестным.

Анализ служит для выяснения идеи решения или доказательства. Дает же доказательство синтез, который, опираясь на данные анализа, показывает, как из данных и ранее установленных утверждений находится искомое или вытекает доказываемое.

IV. Анализ и синтез применяются и при решении задач на построение. Как известно решение этих задач выполняется по следующему плану: анализ, построение, доказательство, исследование. Название первой части – анализ говорит само за себя: это действительно метод анализа, ведущий от искомых («предположим, что искомая фигура построена») к данным, точнее, к их использованию в построении. При анализе намечается план построения, который выполняется синтетическим путем. При доказательстве возможно использование, как анализа, так и синтеза. Исследование предполагает преимущественное применение метода анализа.

V. Учащимся для самостоятельного решения предлагаются задачи на

использование таких эвристик как перебор вариантов и анализ при решении задач на построение.

Задачи и упражнения

1. Постройте квадрат:

а) по двум данным вершинам;

б) по серединам двух противолежащих сторон;

в) по серединам двух прилежащих сторон;

г) по центру и точке на одной из сторон.

При решении этих задач учащиеся обязаны проводить рассуждения, рассматривая различные варианты расположения заданных точек.

2. Два поселка A и B расположены по разные стороны и на разных расстояниях от берегов реки. Где следует устроить переходный мост через речку, чтобы он одинаково отстоял от обоих поселков? (Берега реки считайте параллельными прямыми.)

3. На одном и том же берегу, на разных расстояниях от нее, расположены два села A и B. Где следует построить мост через реку, чтобы он отстоял от этих сел на одном и том же расстоянии?

4. Дан угол в 36^0. Проанализируйте, как с помощью циркуля и линейки можно построить угол в 99^0, используя основные задачи на построение.

5. Дан угол в 54^0. Как с помощью циркуля и линейки разделить его на три равных угла?

6. Постройте треугольник со сторонами a, b и c по трем данным отрезкам $a + b$, $b + c$ и $a + c$.

Указание. $a = \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]-(b+c)$.

7. Дан отрезок AB, расположенный на самом краю листа бумаги. Требуется к этому отрезку через его середину провести перпендикуляр. Как это сделать?

8. Вершина C треугольника ABC не уместилась на чертеже. Постройте основания высоты и биссектрисы, проведенных из вершины C.

9. Даны две точки *A* и *B*. Как с помощью циркуля и линейки провести через эти точки прямую линию, если линейка короче расстояния между ними?

10. Дана окружность радиусом 3 *см* и точка *A* на расстоянии 5 *см* от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке А.

11. На плоскости имеются две окружности. Чему равен радиус окружности, касающийся данных и имеющий центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных и расстояние между их центрами соответственно равны 5, 2, 1?

12. В вершинах треугольника расположены центры трех попарно касающихся окружностей. Найдите радиусы этих окружностей, если стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Сколько решений имеет задача?

VI. Домашнее задание. Решите задачи:

1. Вершина *A* треугольника *ABC* не уместилась на чертеже. Как построить высоту этого треугольника к стороне *BC*?

2. Как в треугольнике, одна из вершин которого не уместилась на чертеже, провести медианы?

ЗАНЯТИЕ 9. ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ. ГЕОМЕТРИЯ ТАНГРАМА

I. В начале занятия обсуждается домашнее задание.

II. Знакомство учащихся с Танграмом.

Игра-головоломка Танграм является одной из старейших и наиболее простых среди головоломок на разрезание и складывание. Этой игрой развлекались древние китайцы, они делили квадрат на 7 частей и называли свою фигуру «чи-чао-тю» (что означает «хитроумный узор из семи частей»).

Название «танграм» возникло в Европе, вероятнее всего от слова «тань» (что означает «китаец») и корня «грамма» (в переводе с греческого «буква»).

Далее учитель рассказывает легенду, связанную с этой игрой.

Это было очень давно, почти две с половиной тысячи лет тому назад. У

немолодого императора Китая родился долгожданный сын и наследник. Шли годы. Мальчик рос здоровым и сообразительным не по летам. Одно беспокоило старого императора: его сын, будущий властелин огромной страны, не хотел учиться. Мальчику доставляло большее удовольствие целый день забавляться игрушками. Император призвал к себе трех мудрецов, один из которых был известен как математик, другой прославился как художник, а третий был знаменитым философом, и повелел им придумать игру, забавляясь которой, его сын постиг бы начала математики, научился бы смотреть на окружающий мир пристальными глазами художника, стал бы терпеливым, как истинный философ, и понял бы, что зачастую сложные вещи состоят из простых вещей. Три мудреца придумали такую игру, и сейчас эта «Китайская головоломка» перед вами.

На доске изображен квадрат, разрезанный на семь частей (см. рис. 109). Игра состоит в том, чтобы из семи частей – танов, складывать различные фигуры, которые напоминают животных, людей, орудия труда, предметы быта.

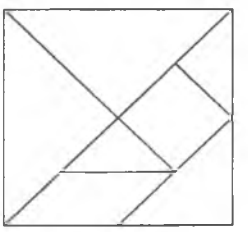


Рис. 109

Правила игры:

1) при складывании каждой фигурки используют все семь частей;

2) таны только соприкасаются друг с другом, накладывать нельзя.

Об увлекательности этой игры говорит то, что французский император Наполеон, который после военного поражения был сослан на остров Святой Елены, часами занимался там складыванием фигур танграма.

Учитель обращает внимание учащихся, что при составлении фигурок танграма так или иначе используется такой эвристический прием как *перебор*, *поиск наилучшего варианта*. Действительно, перебирая различные

расположения танов, в результате получается какая-то фигурка.

Задание. Изготовьте головоломку сами: переведите на плотную бумагу квадрат, разделенный на семь частей (рис. 109) и разрежьте его.

III. Учащимся предлагается выполнить индивидуальное задание.

Индивидуальное задание

Основное задание

Выполняя следующие задания, сделайте «сборочные чертежи» составляемых фигур, т. е. покажите разбиение фигуры на таны.

1. Составьте квадрат из двух фигур; из трех; из пяти.

2. Составьте треугольник, используя четыре фигуры: один большой треугольник, два маленьких и квадрат.

3. Сложите такой же треугольник, используя:

а) один большой треугольник, два маленьких треугольника и параллелограмм;

б) один большой треугольник, один треугольник средний и два маленьких.

4. Можно ли составить треугольник, используя только две фигуры танграма? Три? Пять? Шесть? Все семь фигур?

5. Из каких различных фигур танграма можно составить прямоугольники? Какие еще многоугольники можно составить?

6. Сложите из 7 частей параллелограмм, прямоугольную трапецию, равнобедренную трапецию.

7. Попробуйте составить из 7 кусочков два четырехугольника (рис. 110):

8. Составьте два пятиугольника (рис. 111):

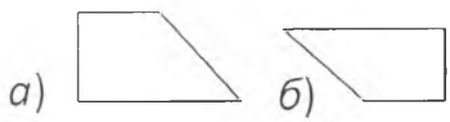


Рис. 110

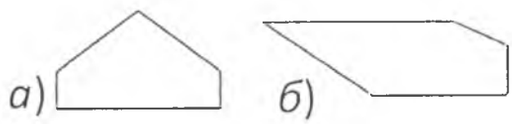


Рис. 111

9. Составьте такие шестиугольники (рис. 112):

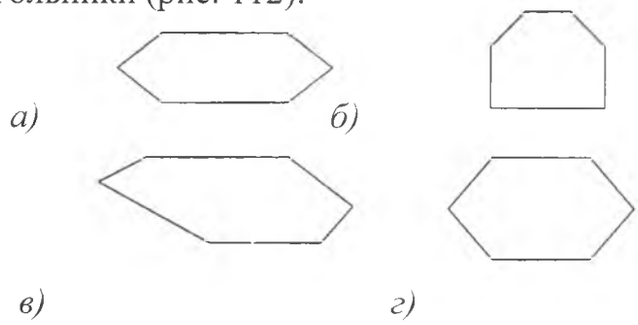


Рис. 112

Дополнительное задание

10. Как ни странно, обе фигурки, изображенные на рис. 113, составлены из семи кусочков танграма. Сможете ли вы сообразить, каким образом фигурка слева приобрела «ногу»?

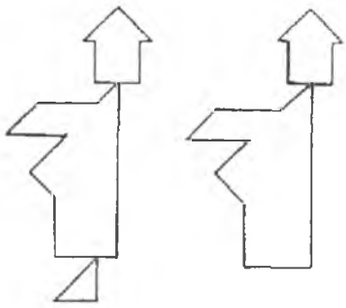


Рис. 113

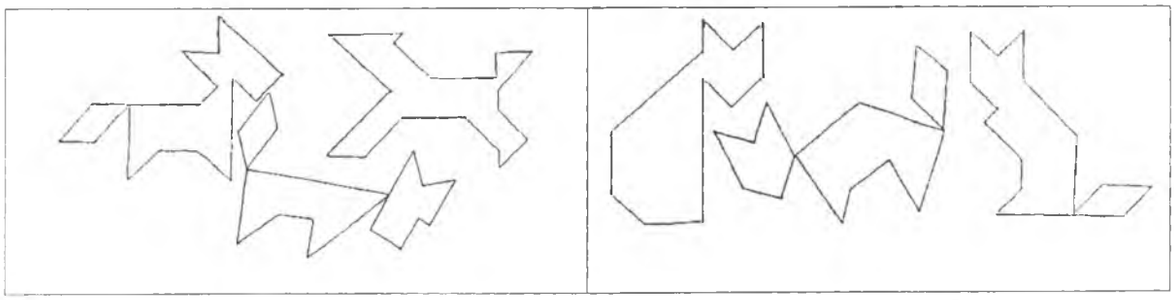
IV. Домашнее задание. Сложите фигурки, приведенные на рис. 95–96, и сделайте их «сборочные чертежи». Если вам удастся, придумайте свои примеры фигурок (композиций фигурок) танграма, сложите их и нарисуйте «сборочные чертежи».

Конкурс по складыванию фигурок танграма

Учащиеся делятся на 2 команды, выбирают капитана, придумывают название команды. У каждой команды заготовлено определенное количество танов.

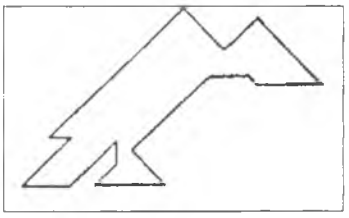
Конкурс 1. Обе команды получают карточки 1-2 с фигурками. Требуется на эти фигурки выкладывать таны в заданном контуре фигур (предполагается, что размеры танов соответствуют размерам фигурок).

Команда, первая справившаяся с этим заданием получает 5 очков.



Карточка 1 Карточка 2

Конкурс 2. Игра с «танграмом» на шахматной доске. Двое играющих (представители обеих команд) получают карточку 3 и по очереди выкладывают по одному тану из имеющихся у них семи танов так, чтобы вершины тана совпадали с узлами сетки доски (размер клетки доски равен размеру квадратного тана). Проигрывает тот, кто при своем очередном ходе не может выложить свой тан. Победивший игрок зарабатывает своей команде 20 очков.



Карточка 3

Конкурс 3. Этот конкурс начинается параллельно с предыдущим конкурсом. На доске вывешиваются плакаты с изображениями различных фигурок (рис. 114-115). Игрокам предлагается на выбор составить ту или иную фигурку, но после составления какой-либо фигуры нужно выйти к доске и нарисовать ее «сборочный чертеж». Каждая команда возле своей фигурки указывает название своей команды. Каждая составленная фигурка оценивается 5 очками.

Подведение итогов конкурса.

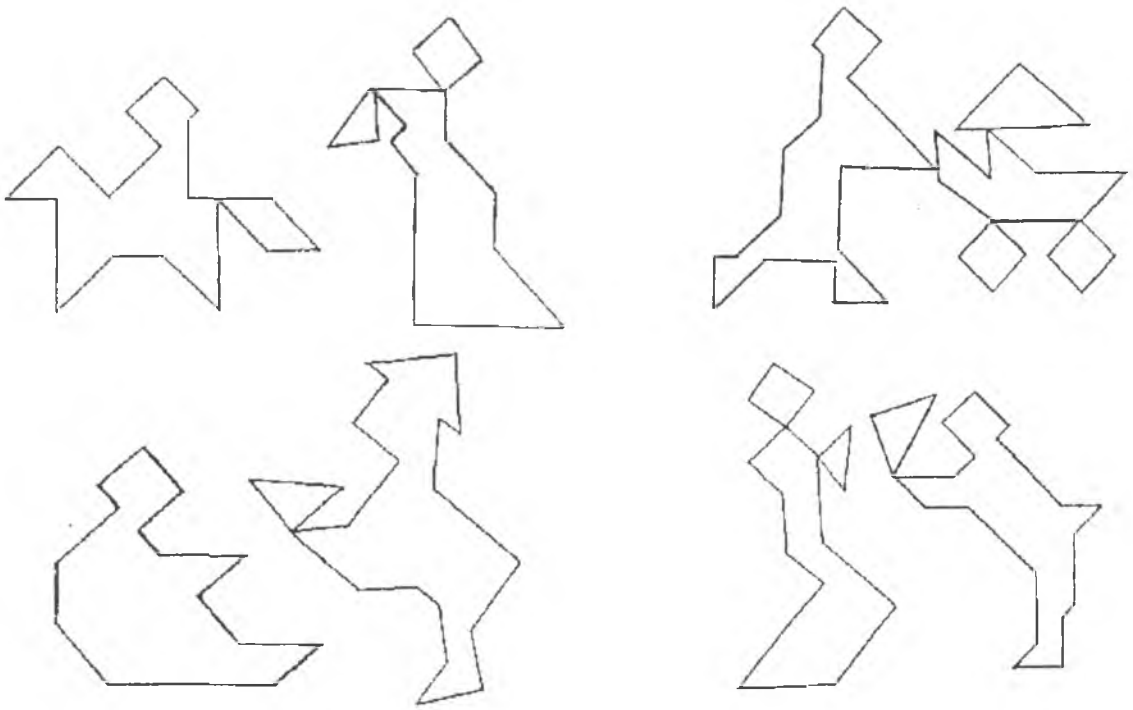


Рис. 114

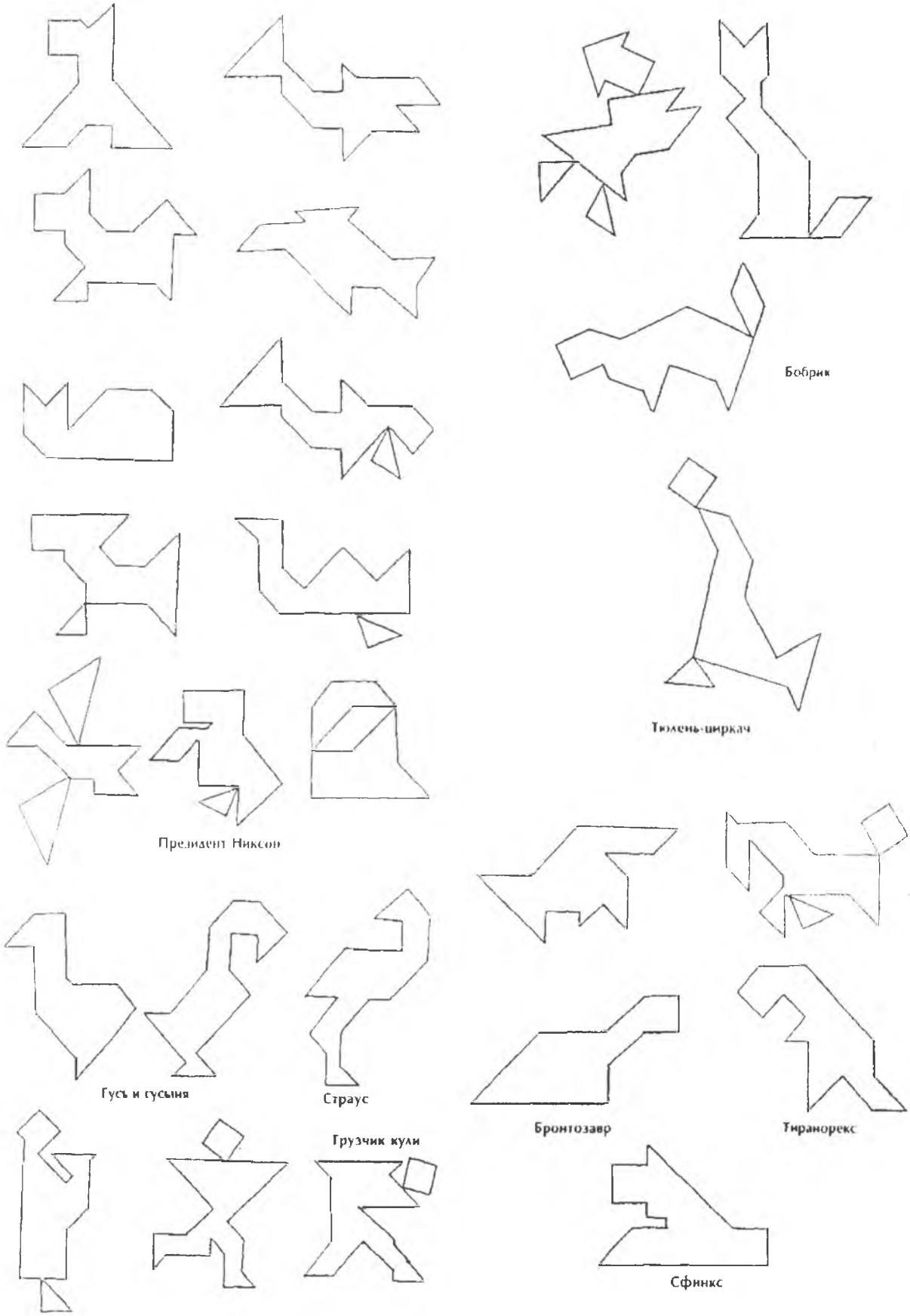

Бобрик
Тюлень-циркач
Президент Никсон
Гусь и гусыня
Страус
Грузчик кули
Бронтозавр
Тиранорекс
Сфинкс

Рис. 115

ЗАНЯТИЕ 10. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

I. Разбор домашнего задания.

II. Рассматривается эвристический прием ***«моделирование»***. Беседа начинается с постановки перед учащимися следующей задачи:

Задача. Рассчитать, сколько надо купить краски, чтобы покрасить потолок комнаты; или сколько нужно купить кафельных плиток для облицовки стены.

Вопросы для обсуждения:

1. Какими данными нужно оперировать, чтобы решить поставленную проблему? (Должно быть известно, например, что на окраску 1 $м^2$ уходит 120 *г* краски; или, что плитка имеет форму квадрата со стороной 15 *см*.)

2. Будет ли иметь значение при нашей задаче, какого цвета этот потолок, из какого материала они построены и т. д.?

3. А что важно знать? (Важно лишь знать их форму и размеры.)

4. От каких свойств рассматриваемого предмета (потолка) мы отвлекаемся (абстрагируемся)?

5. Что мы получаем в результате такого абстрагирования? (Получаем математический объект – геометрическую фигуру.)

6. Существуют ли реально в окружающем нас мире математические объекты? (Реально не существуют, нет в окружающем нас мире геометрических точек, фигур, чисел и т. д. Все они созданы человеческим умом в процессе исторического развития людей и существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.)

Задание. Попробуйте дать определение объекта.

Сравниваются сформулированные учащимися определения с общепринятыми определениями.

Говорят, что – математические объекты это идеальные объекты, отражающие (описывающие) реальные объекты.

Определение. *Объект* – это то, что является предметом рассмотрения (изучения, воздействия).

Задание

Приведите примеры математических и реальных объектов.

Определение. *Математические задачи* – это задачи, в которых объектами являются математические объекты (фигуры, числа).

Определение. *Прикладными задачами* в математике называют задачи, условия которых содержат нематематические понятия. (Или это задачи, в которых объектами являются реальные объекты.)

Задание. Придумайте (составьте, подберите) две задачи: одну математическую, другую прикладную. В каждой из задач назовите объекты, рассмотренные в задачах.

Решая прикладную задачу, сначала создают ее *математическую модель*.

Определение. *Моделью* называется специально созданный объект, отображающий свойства исследуемого объекта (*modele* – копия, образец).

Например, чертеж детали машины есть модель этой детали. Уменьшенные модели самолета, плотины, автомобиля – примеры физических моделей.

Задание. Приведите, как можно больше, примеров различных моделей (объектных, геометрических).

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, уравнения, неравенства, геометрические фигуры и т. д.

Математическое моделирование находит применение при решении многих текстовых задач. Уже уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической (аналитической) моделью. Чертеж фигуры, заданной в геометрической задаче, с обозначенными на ней данными и искомыми тоже является геометрической моделью задачи.

В качестве примера рассматривается задача.

Задача. Оштукатуренная стена длиной 8,25 *м* и высотой 4,32 *м* имеет три окна размером 2,2×1,2 *м* каждое. Найдите площадь той поверхности стены, которая покрыта штукатуркой.

Обсуждение.

Возможные вопросы:

– Данная задача относится к математическим или к прикладным?

– Назовите объекты данной задачи? Они математические или реальные?

Нетрудно заметить, что стена и окна имеют форму прямоугольников.

Задание. Переформулируйте данную практическую задачу в геометрическую и решите ее. Что для этого нужно сделать? Изобразите геометрическую модель задачи.

В этом примере реальные объекты – стену и окна – мы заменяем математическими объектами – прямоугольниками, для чего приходится абстрагироваться (отвлечься) от некоторых особенностей этих реальных объектов (каких именно?).

Задание. Проанализируйте ответ сначала математической задачи, а потом практической. Попытайтесь сделать общий вывод, связанный с решением прикладной задачи.

Учащиеся должны прийти к выводу, что реальное явление, описанное в задаче, мы заменяем идеализированным явлением – геометрической задачей, а поэтому наше решение является приближенным (ошибка может быть в пределах нескольких сантиметров). Математическое решение любой практической задачи всегда является приближенным.

Учащиеся не сразу могут прийти к такому выводу, они могут его получить при выполнении исследовательской работы, запланированной немного позже.

Учащимся предлагается выполнить следующие упражнения.

Задачи и упражнения

1. Какие геометрические фигуры выступают в качестве идеальных

образов (моделей) реальных предметов в следующих практических задачах:

а). Найдите площадь пятикопеечной монеты.

б). Найдите длину обруча.

в). Найдите площадь комнаты.

От каких свойств реальных предметов мы при этом абстрагируемся, а какие учитываем?

2. Решите задачу и создайте для нее математическую модель.

От прямоугольного участка *АВСД*, площадь которого $S = 2000$ *м*^{2}, а ширина $b = 80$ *м*, межой, параллельной основанию, нужно отрезать участок площадью $Q = 780$ *м*^{2}. Как это сделать?

III. Учащимся предлагается провести небольшую **исследовательскую работу**. Для этого класс делится на группы по 5-6 человек.

Задание. Освещение комнаты считается нормальным, если площадь проемов окон составляет не менее 0,2 площади пола. Определите, нормально ли освещение вашего класса.

Каждая группа должна оформить свою работу по следующему образцу:

1. Тема.

2. Цель.

3. Математическая модель задачи.

4. Ход работы (порядок выполнения).

Полезно составить табл. 1.

Таблица 1

Количество окон, N	**Площадь одного окна**	**Площадь N окон**	**Площадь пола**	**Освещение комнаты**
	… *м*^{2}	… *м*^{2}	… *м*^{2}	

6. Вывод.

7. Ф. И. учащихся, выполняющих работу.

В конце работы сравниваются результаты, полученные разными группами.

IV. Домашнее задание

1. Определите, нормальное ли освещение в той комнате, где вы делаете уроки.

2. В одной из комнат вашей квартиры (дома) выберите стену с окном (окнами) и составьте (нарисуйте) ее геометрическую модель. Воспользуйтесь решенной в классе задачей. Сделайте необходимые замеры с помощью измерительной ленты, вычислите площадь той поверхности стены, которая покрыта обоями. Окончательный ответ выразите в метрах.

3. Для выполнения следующего задания учащимся предлагается выбрать (договориться) определенное дерево, растущее недалеко от школы (лучше такое, которое хорошо видно из окна классного помещения).

Задание. Найдите площадь поперечного сечения выбранного дерева, имеющего (приблизительно) форму круга, предварительно измерив дерево в обхвате. Это задание учащимся предлагается выполнить, разделившись на группы. Свое мини-исследование каждая группа должна оформить соответствующим образом.

ЗАНЯТИЕ 11. МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

I. В начале занятия каждая группа докладывает о проделанной работе, делится впечатлениями. Сравниваются результаты, полученные разными группами. Делаются соответствующие выводы. Обсуждение первой задачи.

II. Изготовление моделей многогранников

К Новому году кроме традиционных елочных украшений (хлопушек и фонариков) можно изготовить геометрические игрушки. Это модели правильных многогранников, сделанные из цветной бумаги. Рассматривается рис. 116, на котором изображены правильные многогранники – тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Их форма – образец совершенства.

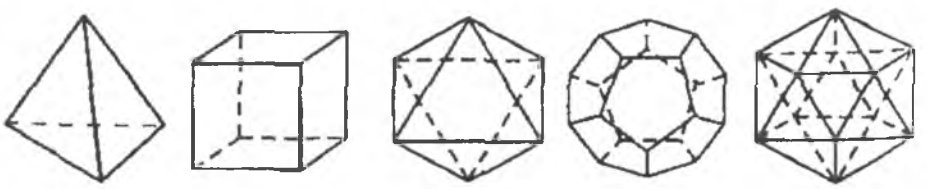


Рис. 116

Совершенство форм, красивые математические закономерности, присущие правильным многогранникам, явились причиной того, что им приписывались различные магические свойства, и все пять геометрических тел издавна были обязательными спутниками волшебников и звездочетов.

Учитель предлагает учащимся заняться изготовлением моделей геометрических тел. На рис. 117, *а* – *д* даны развертки правильных многогранников: *а*) тетраэдр; *б*) куб; *в*) октаэдр; *г*) додекаэдр; *д*) икосаэдр.

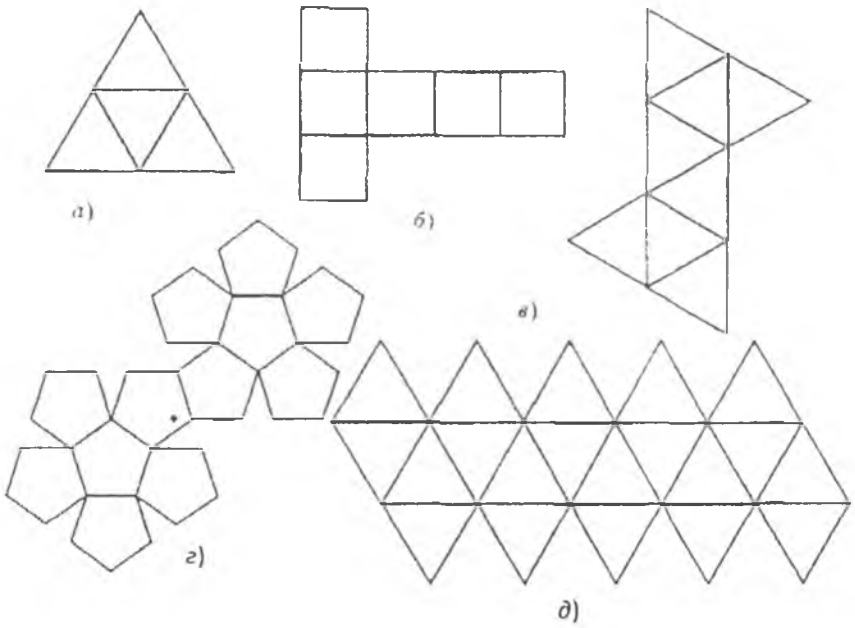


Рис. 117

Учащимся предлагается перечертить на клетчатую бумагу фигуры (рис. 117) и вырезать их. Свернуть из нее модели многогранников, склеить их. При изготовлении нужно будет в нужных местах сделать клапаны для склеивания.

III. Вывод формулы Эйлера

Учащимся предлагается заметить ряд интересных особенностей у правильных многогранников, благодаря которым они и получили свое название. Так, у каждого из них все грани – одинаковые правильные многоугольники, в каждой вершине одного многоугольника сходится одно и то же число ребер, а соседние грани сходятся под равными углами. К этому учащиеся должны прийти сами, исследуя модели построенных многогранников. Учащиеся заполняют табл. 2.

Таблица 2

Многогранник	В	Г	Р	В + Г–Р
Тетраэдр	4	4	6	2

В результате учащиеся должны прийти к такому выводу: «В последней колонке для всех многогранников получился один и тот же результат: В + Г – Р = 2». Самое удивительное в этой формуле, что она верна не только для правильных, но и для ВСЕХ многогранников.

Ради интереса можно предложить учащимся проверить это для нескольких наугад взятых многогранников. Доказал это удивительное соотношение один из величайших математиков Леонард Эйлер (1707–1783), поэтому формула названа его именем: *формула Эйлера*.

IV. Учащимся предлагается решить следующие задачи и выполнить задания, которые позволят им обнаружить некоторые свойства куба.

Задание. Возьмите в руки сделанный вами кубик (лучше, если он будет не очень маленьким). Ваша цель – исследовать его, т. е. обнаружить путем измерения, наблюдения, подсчета как можно больше свойств куба. Обнаруженные свойства запишите в тетрадь. После обсуждения дополните, если это понадобиться, свой список свойств куба теми свойствами, которые заметили ваши одноклассники.

Задачи и упражнения

1. Условимся боковые грани куба обозначать буквой Б, верхнюю – В, нижнюю – Н. Расставьте буквы Б, В и Н на развертках куба в соответствии с уже намеченными (рис. 118).

2. На развертке куба (рис. 119) пронумерованы его грани. Запишите парами номера противоположных граней (противоположные грани не имеют общих ребер): 1, _ , 2, _ , 3, _ . Запишите грани, которые соседствуют с гранью 6. Проверьте себя, перечертив развертку на бумагу, обозначив грани и вырезав ее.

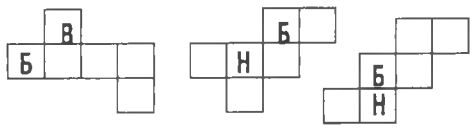


Рис. 118

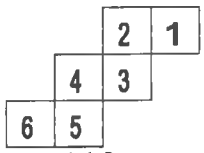


Рис. 119

3. Из фигур, изображенных на рис. 120, выберите те, которые являются развертками куба, и перенесите их в тетрадь. Объясните, почему вы выбрали именно их.

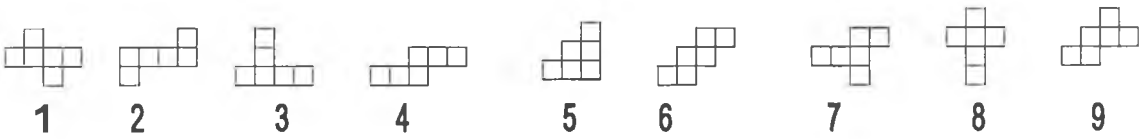


Рис. 120

4. На видимых гранях куба (рис. 121) представлены числа 1, 2, 3. А на развертках – два из названных чисел или одно. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.

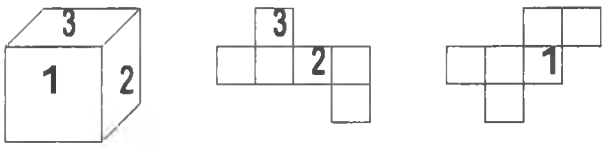


Рис. 121

5. Определите, из каких разверток, изображенных на рис. 122, можно сложить параллелепипед.

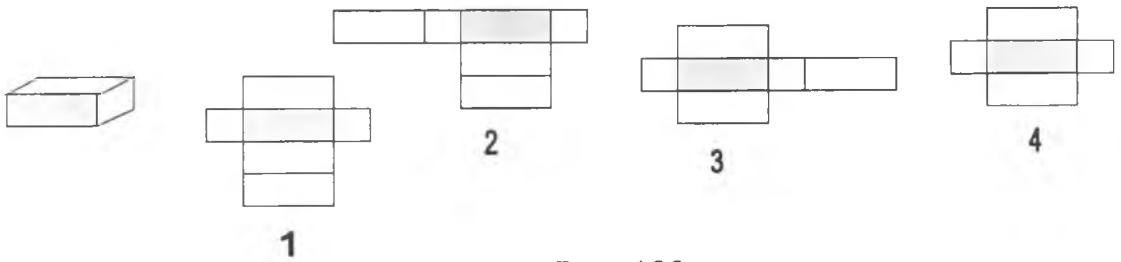


Рис. 122

6. Развертка какого куба приведена на рис. 123?

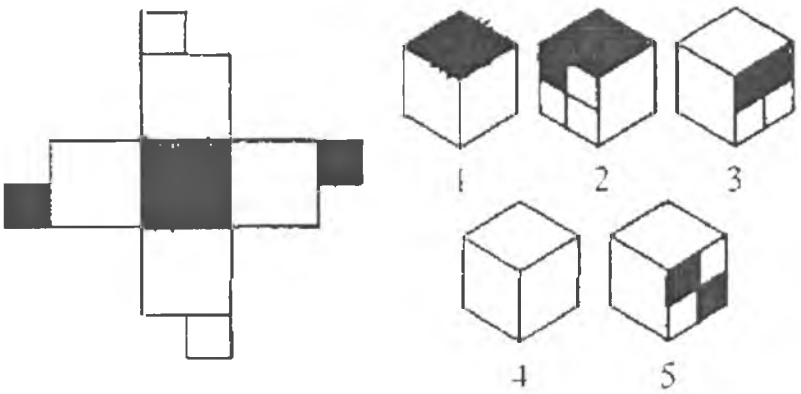


Рис. 123

8. Для двух кубиков сделали по три развертки и перемешали их (рис. 124, *а* – *е*). Найдите развертки каждого кубика.

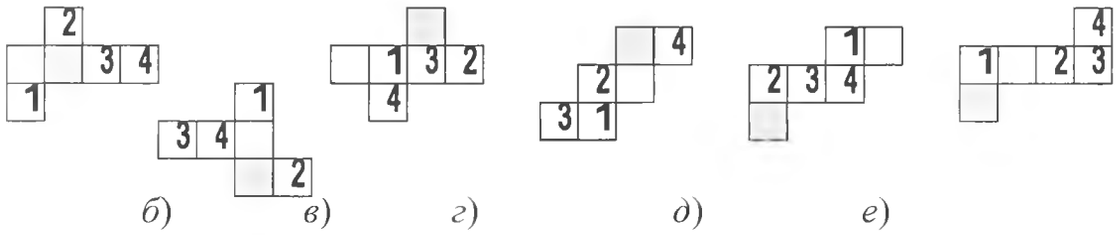


Рис. 124

V. Можно предложить учащимся немного поиграть.

Игровая головоломка «Шахматный куб»

Головоломка состоит из восьми кубиков, раскрашенных в контрастные цвета – белый и черный. Развертки кубиков приведены на рисунке. Кубики можно склеить из плотной бумаги.

Задача состоит в том, чтобы из восьми кубиков сложить куб 2×2×2 с «шахматной» расцветкой каждой грани, как показано на рис. 125. При этом должно соблюдаться следующее условие: кубики можно прикладывать друг к другу только одинаково окрашенными гранями. Сколько существует решений данной задачи?

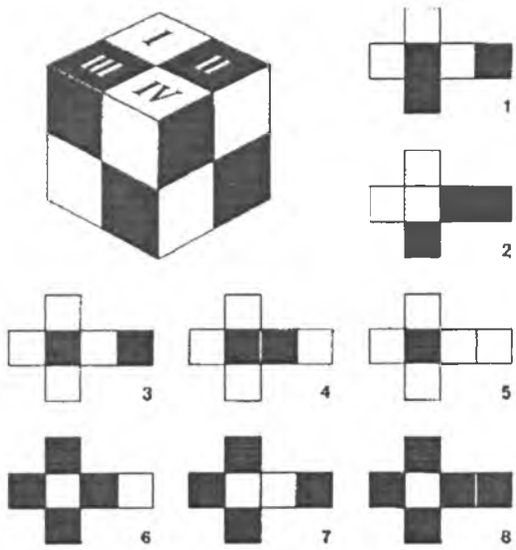


Рис. 125

VI. Другой способ изготовления моделей многогранников

Есть еще один способ изготовления моделей многогранников, при котором они сплетаются из нескольких полосок бумаги. Без применения клея

модель приобретает жесткую структуру после того, как будет заправлен последний кусочек бумаги.

На рис. 126, *а* показано, как можно сплести тетраэдр из двух полосок, состоящих из четырех треугольников.

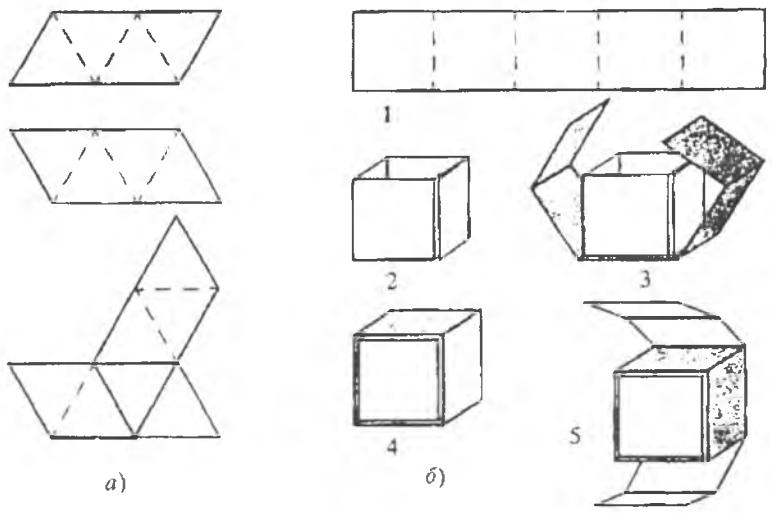


Рис. 126

Задание. Согните и разогните каждую из полосок по пунктирным линиям, чтобы образовались сгибы – «овраги». Наложите цветную полоску на белую. Сложите из белой тетраэдр так, чтобы цветной треугольник оказался внутри него, затем оберните цветной полоской две грани тетраэдра и оставшийся треугольник вставьте в щель между двумя белыми треугольниками.

На рис. 126, *б* дан один из способов плетения куба из трех полосок, разделенных на пять квадратов.

Задание. Вырежьте три полоски: белую, черную, красную. Сложите белую полоску. Оберните ее черной полоской. Получим куб, у которого передняя и задняя грани белые, а остальные – черные. Третью полоску (красную) пропустите сзади куба в щель между белой и черной полосками, согните, и конечные квадраты также пропустите в щель между передней белой гранью и черной полоской.

Если полоски разного цвета, то у получающегося куба противоположные грани одинакового цвета. Показанный на этом рисунке способ

интересен тем, что любые две полоски не зацеплены одна с другой, а все три зацеплены.

VII. Домашнее задание. Существует другой способ плетения куба из таких же полосок. При этом каждые две полоски оказываются зацепленными, а одинаково окрашенными будут пары соседних граней. Попробуйте найти этот второй способ плетения куба самостоятельно.

Придумайте еще несколько разверток куба и начертите их в тетради.

Дается задание сделать доклад о жизни и творчестве Леонарда Эйлера.

ЗАНЯТИЕ 12. ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

I. Обсуждение домашнего задания.

II. Далее рассматривается следующий эвристический прием ***«графическое моделирование»*** или ***«использование графов»***.

Особую роль в курсе математики средней школы играет графическое моделирование: математическими моделями служат диаграммы, графики функций, графические интерпретации уравнений, неравенств, графы и т.д. Графическая модель очень часто позволяет найти путь решения задачи.

Рассматриваются сначала следующие три задачи:

Задача 1. *Первенство класса по настольному теннису.* В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис, Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводится по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из других один раз. На данный момент некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной и Еленой; Борис, как уже говорилось, с Андреем и еще с Галиной; Виктор – с Галиной, Дмитрием и Еленой; Галина – с Андреем и Борисом; Дмитрий – с Виктором и Елена – с Андреем и Виктором. Сколько игр проведено до настоящего момента и сколько еще осталось?

Задача 2. *Сварливые соседи.* Жители пяти домов поссорились друг с другом (рис. 127) и, чтобы не встречаться у колодцев, решили

поделить их (колодцы) так, чтобы хозяин каждого дома ходил к «своему» колодцу по «своей» тропинке. Удастся ли им это сделать?

Задача 3. *Корзины, полные яблок.* В пяти корзинах лежат яблоки пяти разных сортов (рис. 128). Яблоки первого сорта лежат в корзинах *Г* и *Д*; яблоки второго сорта – в корзинах *А, Б* и *Г*; в корзинах *А, Б* и *В* имеются яблоки пятого сорта, в корзине *В* имеются к тому же яблоки четвертого сорта, а в корзине *Д* – третьего. Требуется дать каждой корзине номер, но так, чтобы в корзине № 1 были яблоки первого сорта (хотя бы одно), в корзине № 2 – второго и т. д.

Рис. 127

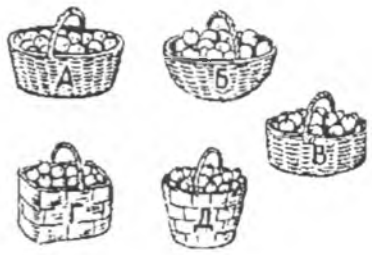


Рис. 128

Перед обсуждением этих задач учитель дает время на их обдумывание и решение. Если кто-то из учащихся решит предложенные задачи логическим путем, то учитель показывает другой (эвристический) путь решения этих задач.

Обсуждение

Эти задачи довольно простые. Достойно удивления другое – хотя на первый взгляд эти задачи довольно различны – в одной говорится о распределении ролей, в другой – о тропинках от домов к колодцам, в третьей – о нумерации корзин с яблоками, существует единый подход к их решению, связанный с так называемой теорией графов.

Переведя эти задачи на язык теории графов, можно увидеть, что все три задачи превратятся в одну простенькую задачу «на графы», решив которую тем самым можно решите все три поставленные выше задачи.

III. Знакомство с основными понятиями теории графов

Прежде всего, стоит сказать о том, что графы, о которых пойдет речь, к

аристократам былых времен никакого отношения не имеют. Наши «графы» имеют корнем греческое слово «графо», что значит «пишу». Тот же корень в словах «график», «биография», «голография».

Понятие графа проще всего выяснить на примере.

Задача 4. В одном городе шесть станций метро: Алмазная, Золотая, Лесная, Парковая, Садовая, Серебряная. Поезда следуют по маршрутам Алмазная – Золотая, Золотая – Серебряная, Лесная – Садовая, Садовая – Парковая, Парковая – Лесная, Серебряная – Алмазная. Можно ли с помощью этих поездов добраться от станции Парковая до станции Алмазная?

Решение. Нарисуем картинку (рис. 129), на которой будем отмечать станции точками, а соединяющие их маршруты – непересекающимися линиями. Теперь видно, что добраться от станции Парковая до станции Алмазная нельзя.

Рис. 129

Определения. Такие картинки – наборы точек, некоторые из которых соединены линиями, – называются *графами.* Точки при этом называют *вершинами графа*, соединяющие их отрезки – *ребрами графа.* Мы будем считать, что две вершины в графе могут быть соединены не более чем одним ребром.

Определение. Число ребер, выходящих из вершины, называется ее *степенью*.

Обозначение: $d(A)$. Например $d(A) = 2$ означает, что из вершины A выходит два ребра.

Определение. Граф называется *связным*, если, двигаясь вдоль ребер, можно из любой его вершины попасть в любую другую.

Приводятся примеры связного графа и несвязного.

Построение графа помогает при решении задач. Очень часто применение графов делает наглядной общую идею задач.

Графами мы пользуемся довольно часто. Возьмите схему железных дорог: здесь станции – это вершины графа, перегоны (участки пути между станциями) – ребра графа. Вершины и ребра многогранника (куба, пирамиды и т. д.) тоже образуют граф.

IV. Решение задач с помощью графов

Вернемся к обсуждению первых трех задач. Попробуем построить граф для ситуации, описанной в задаче 1 «Первенство класса по настольному теннису». Изобразим данные задачи в виде схемы (рис. 131). Участников будем изображать точками: Андрея – точкой А, Бориса – точкой Б и т. д. Если двое участников уже сыграли между собой, будем соединять соответствующие точки отрезками. У нас получится граф с 6 вершинами и 7 ребрами (рис. 130).

Число игр, которые уже были проведены, равно числу ребер, т. е. 7. Чтобы найти число игр, которые осталось провести, надо нарисовать еще один граф с теми же вершинами, но ребрами уже будем соединять тех участников, которые еще не играли друг с другом (рис. 131). Ребер у этого графа 8, т. е. осталось провести 8 игр: Андрей должен сыграть в теннис с Виктором и Дмитрием; Борис – с Виктором, Дмитрием и Еленой и т. д. Как показывает наш граф, других решений задача не имеет.

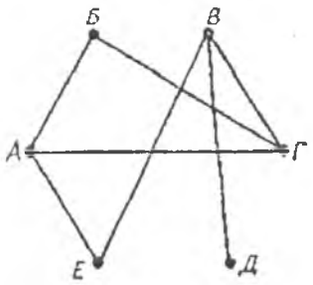


Рис. 130

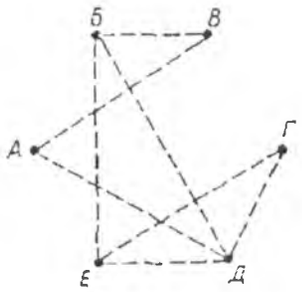


Рис. 131

Задание. Постройте графы для второй и третьей задач.

У ребят должны получиться те же графы. Вторая и третья задачи, по сути, ничем не отличаются от первой.

Обсуждается вопрос: Так ли уж нужны были графы в разнообразных задачах? Разве нельзя прийти к решению чисто логическим путем? Да, можно. Но графы придали условиям наглядность, упростили решение и выявили сходство задач, превратив три задачи в одну, а это не так уж мало. А если представить себе задачи, графы которых имеют 100 или более вершин. А ведь именно такие задачи приходится решать современным инженерам и экономистам. Тут уж без графов не обойтись.

V. Учащимся предлагается выполнить следующие упражнения.

Задачи и упражнения

1. Нарисуйте граф:

а) имеющий три вершины и два ребра;

б) четыре вершины и четыре ребра;

в) четыре вершины и шесть ребер.

2. Придумайте и нарисуйте: связный и несвязный граф. Обменяйтесь тетрадями с соседом по парте и проверьте, правильно ли он выполнил это задание.

3. В графе n вершин и любые две из них соединены одним ребром. Сколько ребер в этом графе?

4. Встретились три мушкетера и четыре гвардейцы. И мушкетеры, и гвардейцы любят только тех, кто служит в их части. Изобразите эту систему отношений с помощью графа.

5. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

6. Пять мальчиков Андрей, Борис, Василий, Григорий и Дмитрий разъехались на каникулы. Стали переписываться: Андрей и Дмитрий, Василий и Григорий, Григорий и Борис. Постройте граф, показывающий, кто с кем поддерживает переписку. Может ли сообщение о жизни Бориса дойти до Василия? до Андрея?

7. Можете ли вы построить граф, у которого:

а) одна вершина степени 3 и три степени 1;

б) одна вершина степени 2 и три степени 1;

в) пять вершин степени 7 и две вершины степени 6;

г) три вершины степени 5, пять вершин степени 7 и семь вершин степени 3?

8. На рис. 132, *а – д* изображены графы. Для каждого из этих графиков определите степени его вершин.

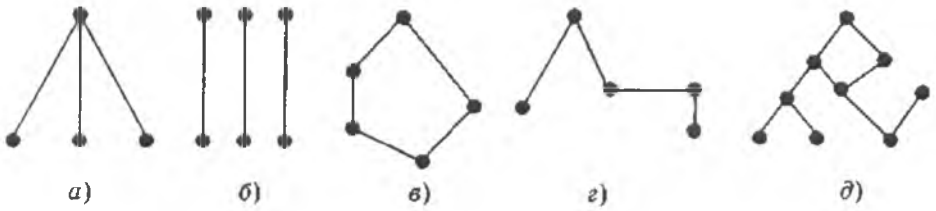


Рис. 132

9. Постройте графы, в которых степень всех вершин: *а*) 1; *б*) 2; *в*) 3.

10. В стране живут 20 рыцарей. Может ли быть так, что у троих из них по 7 врагов, у одиннадцати – по 2 врага, а у шести – по 5 врагов?

11. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

12. Женя пытался представить родственные отношения в своей семье в виде графа. Вершинами он отмечал некоторых членов семьи, а ребрами соединял тех, кто является отцом и сыном. Результаты его изысканий представлены на рис. 133. Не допустил ли Женя ошибки?

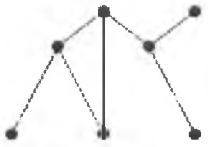


Рис. 133

13. Можно ли построить граф, в котором будут только вершины степени 3 и 5, а число ребер будет равно 7?

14. В графе n вершин ($n > 1$).

а). Какие степени могут быть у вершин графа?

б). Могут ли быть у графа одновременно вершина степени $n - 1$ и вершина степени 0?

в). Докажите, что в графе обязательно есть две вершины с одинаковыми степенями.

15. В высшей футбольной лиге участвуют 16 команд. Каждая команда

должна сыграть с каждой остальной ровно один раз. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

VI. Домашнее задание. Используя связные и несвязные графы, изобразите «карту» вашей местности (или ваш путь от дома к школе и обратно). Для каждого графа определите количество его вершин и степень каждой вершины.

ЗАНЯТИЕ 13. ГРАФИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФИГУР ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

I. Обсуждение домашнего задания.

II. Вместе с учащимися разбираются следующие две задачи.

Задача 1. В классе 24 человека. Может ли быть так, что 8 из них имеют по три друга в классе, 11 – по пять друзей, а 5 человек по четыре друга?

Задача 2. В государстве 24 города. Может ли быть так, что 8 из их соединены с тремя городами, 11 – с пятью городами, а 5 – с четырьмя городами?

Решение. И в той, и в другой задаче речь идет о том, можно ли построить граф, имеющий 24 вершины, причем 8 из них соединены ребрами с тремя вершинами, 11 – с пятью вершинами и 5 – с четырьмя вершинами. Сосчитаем, сколько ребер должно быть у такого графа. Для этого найдем сумму: $8 \cdot 3 + 11 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 24 + 55 + 20 = 99$ (по три ребра выходит из каждой вершины первого сорта, по пять из каждой вершины второго сорта и по четыре – из каждой вершины третьего сорта). Очевидно, что мы считали каждое ребро дважды – ведь оно соединяет две вершины. Поэтому ребер должно быть $99 : 2 = 49{,}5$. Но число ребер не может быть не целым. Получено противоречие. Такой граф построить невозможно.

В рассмотренных примерах речь шла о построении графа, имеющего 8 вершин степени 3, 11 вершин степени 5 и 5 вершин степени 4.

Еще не зная слово «граф», учащиеся, возможно, уже встречали задачи, в которых спрашивалось, можно ли нарисовать ту или иную картинку, не

отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию ровно один раз. Такие задачи впервые были исследованы Леонардом Эйлером и типичны для теории графов.

Учащимся предлагается следующее задание с целью, чтобы они сами «открыли» важное свойство о вычерчивании фигур одним росчерком.

Задание. Испытайте свои силы в вычерчивании одним росчерком фигур, изображенных на рис. 134.

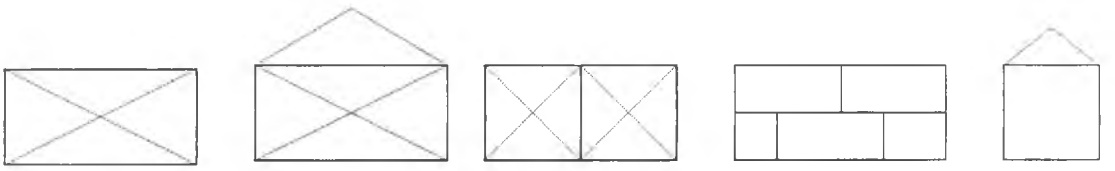


Рис. 134

Какие-то из этих фигур учащиеся вычерчивают почти сразу, решение других приходит через некоторое время, а третьи вообще не рисуются. Почему так происходит? Далее эта проблема решается вместе с учащимися.

Задание. Попытайтесь начертить одним росчерком графы, изображенные на рис. 135 и 136.

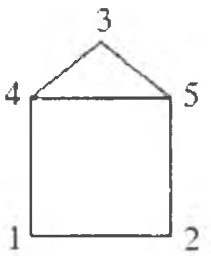


Рис. 135

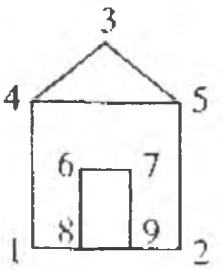


Рис. 136

Возможны такие вопросы:

1). В чем сходство и отличие приведенных графов?

2). Для каждого из графов определите степени его вершин.

3). Определите число четных и число нечетных вершин.

4). Сделайте соответствующие выводы, какой из приведенных графов можно вычертить одним росчерком, а какой нельзя. Почему?

Учащиеся без труда придут к такому заключению:

Граф на рис. 135 имеет пять вершин, причем три из них четные

(первая, вторая и третья – в них соединяется четное число линий), а две нечетные (четвертая и пятая – в них соединяется нечетное число линий). Эту фигуру можно начертить одним росчерком. А вот домик с дверью (рис. 136) – уже иная фигура. Она содержит девять вершин, пять из которых четные, а четыре – нечетные.

Если в фигуре (на графе) число нечетных узлов больше двух, то ее нельзя нарисовать одним росчерком.

Определение. Если в каждой вершине связного графа сходится четное число ребер, то такой граф называется «*эйлеров*».

Теорема. Граф эйлеров, если он связен степень каждой вершины четная.

Всякий эйлеров граф допускает непрерывный замкнутый обход (такой путь в теории графов называется *циклом*), проходящий по каждому ребру ровно один раз. Граф, не являющийся эйлеровым, такого обхода не допускает.

Задача 3. Можно ли нарисовать граф, изображенный на рис. 137, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

Головоломки с непрерывными линиями известны повсюду, например, на островах южной части Тихого океана рисование таких узоров считается там большим искусством; островитяне чертят их пальцем на песке (рис. 138).

Такие узоры известны с давних пор в Африке. Они очень часто служат иллюстрациями к легендам и сказаниям. Вот рис. 139 из Анголы – он иллюстрирует историю о сотворении мира. Можете ли вы нарисовать его?

Рис. 137

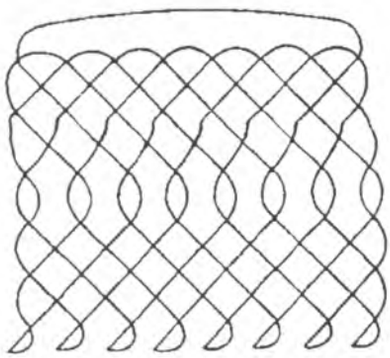


Рис. 138

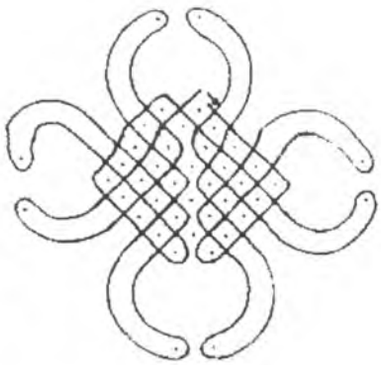


Рис. 139

III. Учащимся предлагается выполнить следующие упражнения.

Задачи и упражнения

1. В городе пять островов, некоторые из которых соединены мостами (рис. 140). Можно ли обойти все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Решите такую же задачу для другого города, схема которого изображена на рис. 141. (Задача такого типа про город Кенигсберг впервые была решена Леонардом Эйлером.)

2. Не отрывая карандаша от бумаги, и не проводя ни по какому ребру дважды, нарисуйте графы, изображенные на рис. 142-143. Занумеруйте ребра в той последовательности, в которой вы их проходили.

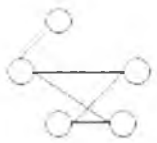


Рис. 140

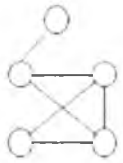


Рис. 141

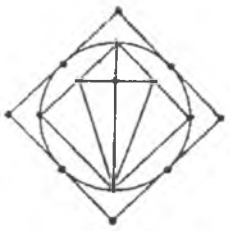


Рис. 142

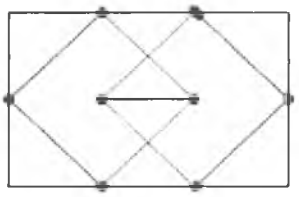


Рис. 143

3. Оса забралась в банку из-под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли оса последовательно обойти все 12 ребер куба, не проходя дважды по одному ребру? Подпрыгивать и перелетать с места на место она не может.

4. На рис. 144 изображен план подземного лабиринта (подвала из 16 комнат, соединенных дверьми). Можно ли, начиная с комнаты 1, обойти комнаты так, чтобы пройти через все двери всех комнат только один раз? В какой комнате закончится такой обход?

Указание. Замените комнаты точками, а двери – дугами и постройте соответствующий граф.

5. На рис. 145 изображен план подвала из десяти комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

IV. Домашнее задание. Потренируйтесь в вычерчивании одним росчерком графов, изображенных на рис. 146.

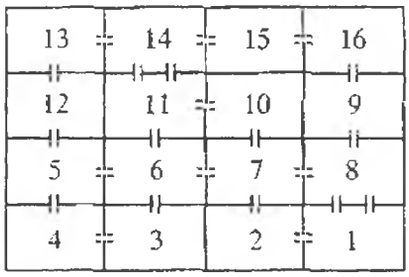


Рис. 144

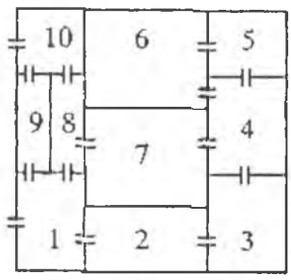


Рис. 145

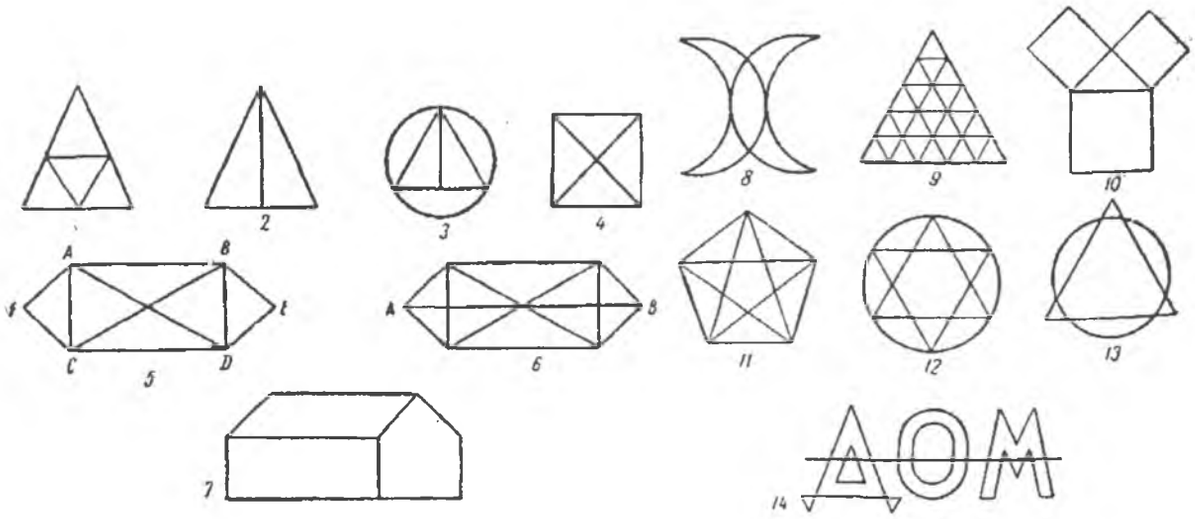


Рис. 146

ЗАНЯТИЕ 14. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

I. В начале занятия несколько минут уделяется домашнему заданию.

II. Далее учащимся для решения предлагаются эвристические задачи[1].

Задачи и упражнения

1. Восемь спичек расположите так, чтобы образовались один восьмиугольник, два квадрата и восемь треугольников – все в одной фигуре.

2. Каждая спичка имеет длину 4,5 *см*. Как из 13 или даже из 5 спичек, не ломая их, сложить метр?

3. Из 6 спичек сложите 4 равносторонних треугольника.

4. Сложите три равных квадрата из: *а*) 11 спичек; *б*) 10 спичек.

---

[1] Интересные задачи со спичками также относятся к эвристическим задачам. Для их решения нужны сообразительность, способность предвидеть результат и, пожалуй, хорошее воображение. В работе над этими задачами можно использовать спички, счетные палочки или просто рисунок на бумаге.

5. Положите 12 спичек так, чтобы получилось: *а*) 2 квадрата; *б*) 3 квадрата; *в*) 5 квадратов; *г*) 6 квадратов.

6. Из 12 спичек сложите 4 равных квадрата. Переместите 3 спички так, чтобы получились 3 равных квадрата. Уберите 2 спички так, чтобы из данной фигуры получились: *а)* 3 квадрата; *б)* 2 квадрата.

7. Даны 12 спичек. Примем каждую из них за единицу длины. Требуется выложить из 12 спичек фигуру, которая охватывала бы площадь в три квадратные единицы. Найдите несколько вариантов.

8. Придумайте несколько задач со спичками и предложите решить их своим друзьям.

9. Из 12 спичек можно сделать фигуру креста (рис. 147), площадь которой равна 5 «спичечным» квадратам. Измените расположение спичек так, чтобы контур фигуры охватывал площадь, равную только 4 «спичечным» квадратам. Пользоваться при этом услугами измерительных приборов нельзя.

10. Комната имеет форму многоугольника, изображенного на рис. 148. Укажите, где можно расположить источник света, чтобы он осветил всю комнату. Как называется фигура, заполняемая этими точками?

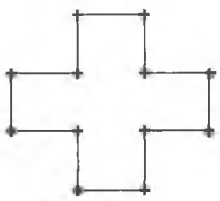


Рис. 147

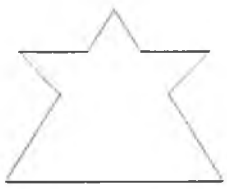


Рис. 148

11. Какую форму должна иметь многоугольная комната, чтобы одной лампой ее нельзя было всю осветить, а двумя – можно?

12. Придумайте комнату такой формы, чтобы в ней можно было указать точку, из которой ни одна из стен не видна полностью.

13. Какие фигуры могут получиться при пересечении двух треугольников? А при пересечении двух четырехугольников? Возможно ли, чтобы при пересечении двух четырехугольников образовалось два

четырехугольника? А три четырехугольника?

14. У Пети есть два карандаша длиной 7 *см* и 17 *см*. Как с их помощью отмерить 1 *см* (ломать нельзя)?

15. Докажите, что сумма диагоналей любого выпуклого четырехугольника меньше его периметра.

16. Возможно ли, чтобы все стороны десятиугольника располагались на пяти прямых?

17. Может ли при пересечении двух четырехугольников образоваться: *а)* шестиугольник; *б)* восьмиугольник; *в)* десятиугольник; *г)* четыре четырехугольника?

18. На листе бумаги изображен четырехугольник. Каким способом можно проверить, имеет ли он центр симметрии?

19. На плоскости проведены три пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

20. Пусть A и B – точки плоскости, расстояние между которыми $AB = 1$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых расстояния до A и B выражаются целыми числами.

21. Расположить 6 точек на 4 отрезках, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

22. Имеются 13 равных квадратов. Как составить из них два квадрата?

23. Как измерить диагональ кирпича, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть: *а*) еще два таких же кирпича; *б*) один такой кирпич?

Отрезок, соединяющий две противоположные вершины кирпича (наиболее удаленные друг от друга), называется диагональю кирпича.

24. На рис. 149 $ABCD$ – квадрат, $|CF| = |FD| = |AB|$. Найдите $\angle AFB$.

25. Что больше – площадь трех внутренних кругов или заштрихованной части полукруга (рис. 150)?

III. Обсуждение некоторых задач. В конце занятия учащимся предлагается проанализировать каждую задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция для решения задачи;

в) что послужило инсайтом для решения задачи;

г) какие эвристики использовались при решении.

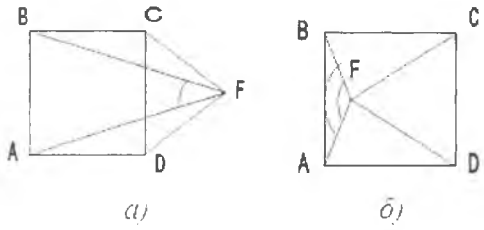


Рис. 149

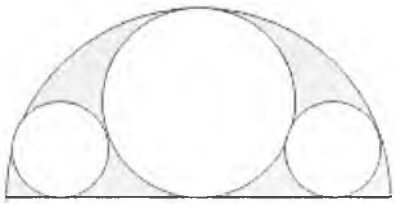


Рис. 150

IV. Домашнее задание. Подготовьтесь к зачету.

ЗАНЯТИЕ 15. ЗАЧЕТ

I. Для зачета учащимся предлагается решить следующие задачи.

Задачи

1. Сформулируйте задачу правильно и решите ее: «Стороны прямоугольника относятся как 2:4. Найдите величину его сторон».

2. К данному предложению сформулируйте вопрос, чтобы получилась задача: «Две окружности с радиусами 5 *см* и 3 *см* касаются внутренним образом. O и O_1 – центры окружностей».

3. Можно ли из проволоки, длина которой 20 *см*, согнуть такой треугольник, одна сторона которого была бы равна: 8 *см*; 10 *см*; 12 *см*?

4. Введите обозначения и перечислите все элементы и их свойства, которые вы сможете увидеть на рис. 151.

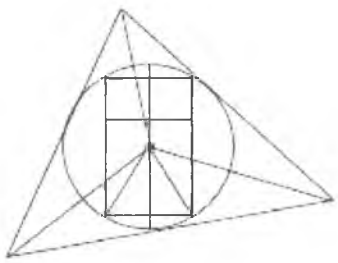


Рис. 151

5. Дан угол в 19^0. Опишите, как с помощью циркуля и линейки можно построить угол в 1^0, используя основные задачи на построение.

6. По какому признаку составлены следующие буквы русского алфавита: 1) А, Д, М, Т, П, Ш; 2) В, Е, З, К, С, Э, Ю; 3) И; 4) Ж, Н, О, Ф, Х; 5) Б, Г, Л, Р, У, Ц, Ч, Щ, Я?

7. Нарисуйте граф: *а*) связный; *б*) несвязный; *в*) эйлеров; *д*) имеющий 3

вершины и 5 ребер.

8. Какие из приведенных на рис. 152 графов можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

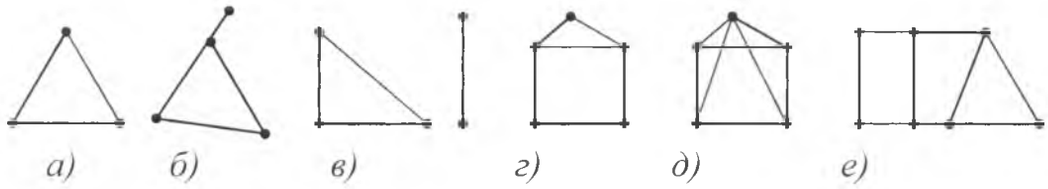


Рис. 152

9. В лесу три дома и три колодца. Хозяин каждого дома хотел проложить дорогу от своего дома к каждому колодцу так, чтобы эти пути не пересекались (в точках, отличных от колодцев и домов). Начав осуществлять свои планы, хозяева домов пришли к затруднению. Можно ли им помочь?

10. На бумаге проведены две пересекающиеся прямые, но их точка пересечения недоступна. В этом месте оказалась дырка на бумаге. Предложите способ, с помощью которого можно было бы измерить угол между этими прямыми.

11. Приведите свои примеры алгебраической, геометрической, физической моделей.

12. Напишите небольшое научное сочинение о теории перспективы. В качестве примеров нарисуйте картинки с кажущимися выпуклостями и вмятинами на листе бумаги.

II. После выполнения заданий учащимся предлагается проанализировать каждую решенную задачу:

а) какие возникали гипотезы во время размышлений;

б) понадобилась ли интуиция, инсайт для решения задачи;

в) какие эвристики были использованы при решении каждой задачи.

III. Домашнее задание. Подготовьте к итоговому занятию свои сочинения, рассказы, сообщения, рисунки и прочие творческие работы.

ЗАНЯТИЕ 16. ИТОГОВОЕ ЗАНЯТИЕ

I. Занятие строится в виде конкурса. Учащиеся разбиваются на две команды.

Конкурс 1. *Игра на внимание.* Вывешиваются два одинаковых плаката, на которых в запутанном порядке записаны числа от 1 до 30 (рис. 153). Нужно как можно быстрее указать по порядку все числа. В игре принимают участие два ученика – по одному от каждой команды.

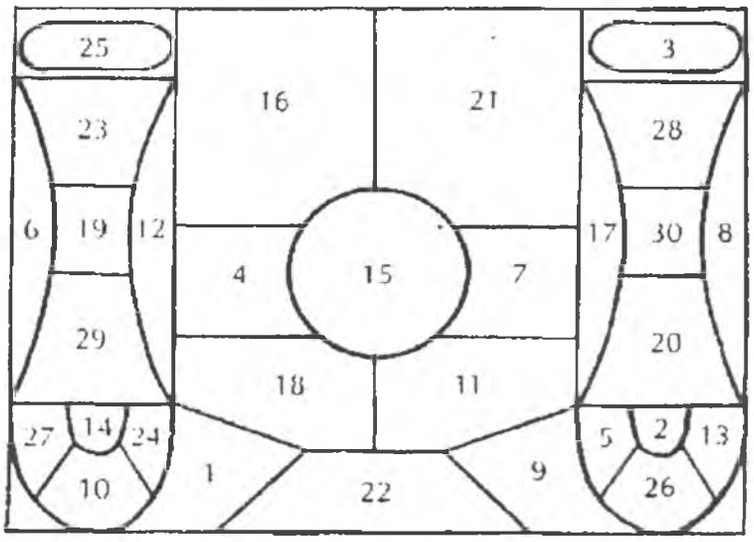


Рис. 153

Конкурс 2. Представители обеих команд (по 2-4 человека) читают свои сочинения на темы: «Симметрия в моей жизни», «Симметрия в природе». Важно, чтобы в каждой команде прозвучали обе темы.

Конкурс 3. Каждая команда предлагает своим соперникам сделать «сборочный чертеж» своей композиции фигурок танграма.

Конкурс 4. Это конкурс на самый оригинальный рисунок с кажущимися выпуклостями и вмятинами.

Подведение итогов конкурса.

II. В конце занятия учитель подводит итоги о проделанной работе учащихся в течение всех занятий факультатива, отмечает наиболее отличившихся ребят, заслуги и достижения каждого. В ходе беседы учащиеся делятся своими впечатлениями, замечаниями, советами. Отмечают, что они не знали, что нового открыли для себя, чего достигли.

ОТВЕТЫ И ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПОДСКАЗКИ

ЗАНЯТИЕ 1

III. Задача 2. *Эвристическая подсказка.* Разберите все возможные варианты расположения дорожек. *Ответ.* Рис 154.

IV. 3. *Эвристическая подсказка.* У квадрата четыре стороны, а мы имеем две спички. Где взять еще две стороны? *Ответ.* Надо положить две спички так, чтобы край стола или книги образовали две другие стороны квадрата. **4.** Достаточно одного разреза, если расположить прямоугольники так, как показано на рис. 155. **5.** *Эвристическая подсказка.* Переберите возможные варианты. *Ответ.* Рис. 156. **6.** Рис. 157.

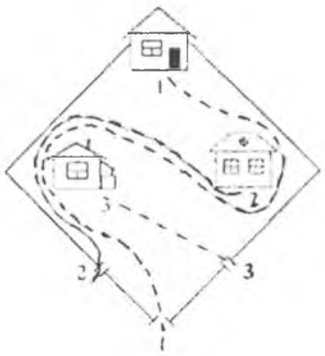


Рис 154

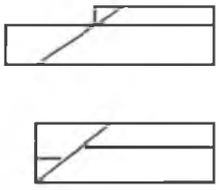


Рис 155

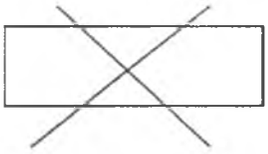


Рис 156

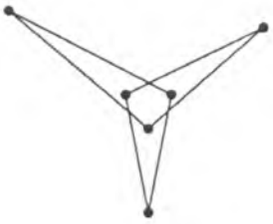


Рис 157

V. 1. *Эвристическая подсказка.* Проанализируйте формулировку вопроса. *Ответ.* 8 граней, если карандаш не заточен. **2.** Рис. 158. **3.** Рис. 159. **4.** Рис. 160. **5.** Спичку кладут на угол стола так, чтобы оба края стола образовали две другие стороны треугольника. **6.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку. *Решение.* Первая страница первого тома и последняя страница третьего тома примыкают ко второму тому. Путь червяка равен толщине второго тома книги, т. е. 3,5 *см*. *Ответ.* 3,5 *см*. **7.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией, или тем, что диагональ разделяет прямоугольник на уровне треугольники. *Решение.* Прямоугольники *А* и *Б* имеют равные площади. Это следует из того, что диагональ разделяет прямоугольник на уровне треугольники. Получается, суммарная площадь *А*, *В* и *Г* равна площади *Б*, *В* и *Г* (рис. 161). *Ответ.* Площади равны.

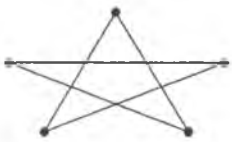


Рис 158

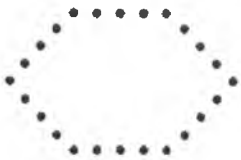


Рис 159

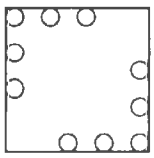


Рис 160

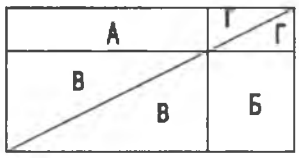


Рис 161

8. *Эвристическая подсказка.* Модифицируйте (изменяйте, преобразовывайте с появлением новых свойств): найдите связь между прямоугольным треугольником и прямоугольником; воспользуйтесь свойством диагоналей прямоугольника. *Решение*. Линия *AC* является одной из диагоналей прямоугольника *ABCO*. Вторая диагональ *BO* служит радиусом окружности, длина которой равна 10. Поскольку диагонали у прямоугольника равны, длина *AC* также равна 10. *Ответ*. 10. **9.** *Эвристическая подсказка*. Нарисуйте картинку, рассмотрите различные варианты. *Ответ*. Рис. 162. **10.** *Эвристическая подсказка*. Проанализируйте, куда заходят ученики, когда садятся в автобус. *Ответ*. Поскольку на рисунке не видно автобусных дверей (они находятся на невидимой для нас стороне автобуса), он едет влево, т. е. в Москву. **11.** *Эвристическая подсказка*. Переберите возможные варианты. *Ответ*. Рис. 163. **12.** Рис. 164.

VI. Можно составить из троек {4, 7, 10}; {4, 10, 13} и {7, 10, 13}. Нельзя составить из тройки {4, 7, 13}.

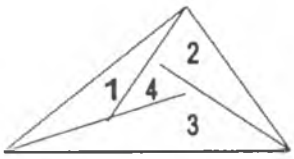


Рис 162

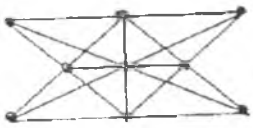


Рис 163

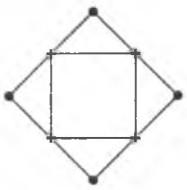


Рис 164

Рис 165

ЗАНЯТИЕ 3

II. 1. *ВД*: боковая сторона равностороннего треугольника *ABCD*; гипотенуза прямоугольного треугольника *CBD*; основание треугольника *DAB*. **3.** 15 правильных треугольников. Можно отбросить четыре точки (рис. 165). **4.** Четыре. **5.** Следующие обозначения соответствуют одному и тому же углу: $\angle ABC$, $\angle DBC$ и $\angle DBE$; $\angle CAB$ и $\angle DAC$; $\angle CFE$ и $\angle CFD$. Вертикальные углы $\angle BED$ и $\angle CEF$. Смежные углы $\angle DEC$ и $\angle BED$. **6.** 2 *п*. **7.** 1) 7; 2) 9.

IV. 1. *AE*, *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *ВД*, *BE*, *CD*, *CE*, *DE* (10 отрезков). **2.** 6 секторов. **3.** *АВД*, *АСД*, *АОД*, *АВО*, *ОСД* (5 треугольников). **4.** Острые углы: *∠ДОС*, *∠ДОВ*, *∠ДОА*, *∠СОВ*, *∠СОА*, *∠ВОА* (7 углов). **5.** Фигуры: треугольник (прямоугольный), четырехугольники (прямоугольники, прямоугольные трапеции). 6 треугольников. **7.** *AB*: сторона треугольника, диагональ квадрата, ось симметрии квадрата. **8.** *AC*: диаметр круга, диагональ квадрата, перпендикуляр к другому отрезку, сторона треугольника (основание равнобедренного треугольника), ось симметрии квадрата, круга. **9.** *KE*: меньшая сторона прямоугольника, диаметр круга, сторона треугольника (основание равнобедренного треугольника). **10.** *LOK* и *СОД*, *KOF* и *СОВ*, *FOE* и *ВОД*, *ЕОД* и *AOL*, *LOF* и *ДОВ*, *FOД* и *BOL*, *EOC* и *AOK*, *LOE* и *ДОА*, *КОД* и *COL*, *FOC* и *BOK*, *EOB* и *AOF* (11 пар углов). **11.** 32 треугольника, 6 квадратов, 4 трапеции, 8 параллелограммов. **12.** 8 четырехугольников.

VI. 1. 10.

ЗАНЯТИЕ 4

VI. *Софизм.* Части прямоугольника неплотно примыкают друг к другу. Между ними образуется «щель» в виде вытянутого параллелограмма. Площадь этой щели равна 1 кв. ед.

VIII. 1. *Эвристическая подсказка.* Приведите контрпример. *Ответ.* Нет, неправильно. Например, можно взять два прямоугольника: один со сторонами 2 *см* и 5 *см*, другой – 3 *см* и 4 *см*. Периметры у них одинаковые – по 14 *см*, а площади разные: у первого 10 *см*^{2}, у второго – 12 *см*^{2}. **2.** Чтобы получить необходимый треугольник, надо взять стороны такими, чтобы сумма двух сторон мало отличалась от третьей стороны.

ЗАНЯТИЕ 6

V. 1. *А, В, Д, Е, К.* **2.** Одну ось симметрии имеют буквы: *А, В, Т, Ш*; две: *Ж*, *Н*, *О*; ни одной *Б*. **3.** Одну ось симметрии имеют буквы: *П, Т, С*; две: *Н, О, Х*; ни одной: *Г, Р, И.* **4.** Да, например, окружность. **5.** Одна ось симметрии, например, у равнобедренного треугольника; две оси симметрии – у прямоугольника, три – у равностороннего треугольника; четыре – у квадрата.

6. Четыре. **7.** 0, 1, 7. **8.** Рис. 166. **9.** *а*). *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь тем, что биссектриса угла является его осью симметрии; *б*). *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь тем, что перпендикуляр, который проведен в середине отрезка, является его осью симметрии.

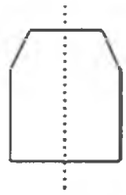


Рис. 166

VII. 7. 1) дельтоид – четырехугольник, который состоит из двух равнобедренных не равных треугольников, которые приложены друг к другу равными основаниями; 2) параллелограмм; 3) прямоугольник или ромб; 4) квадрат. **10.** Во всех случаях $MM_2 = 2AB = 2$. **14.** *Эвристическая подсказка.* Проведите прямую, которая проходит через центры обеих окружностей. **16.** Из задачи 15 следует, что центральную симметрию можно заменить двумя последовательными осевыми симметриями. Но при осевой симметрии фигура переходит в равную ей фигуру. **17.** Пусть в результате симметрии относительно точки О прямая l переходит в прямую l_1 (О не лежит на l). Если l и l_1 пересекаются в точке M, то они должны пересекаться и в точке M_1, которая симметрична M относительно O.

ЗАНЯТИЕ 7

IV. 1. *Эвристическая подсказка.* Переформируйте задачу. Нарисуйте картинку. Отобразите симметрично точку A от одного берега, а точку B – от другого. Полученные точки A_1 и B_1 соедините прямой. Точки пересечения A_1B_1 с берегами реки и являются точками, где должны побывать туристы. **2.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Ответ.* Нужно отобразить точку A симметрично сторонам угла и соединить прямой две полученные точки. Эта прямая будет пересекать стороны угла в нужных нам точках B и C. **3.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией, точнее тем, что окружность симметрична относительно любого своего диаметра. *Решение.* Поскольку окружность симметрична относительно любого своего диаметра, то она симметрична и относительно диаметра MN, который перпендикулярен прямым AA_1 и BB_1; точка A симметрична A_1, точка B симметрична B_1. Значит, все точки дуги AB симметричные точкам дуги

A_1B_1, т. е. дуги AB и A_1B_1 равны (рис. 167). **4.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. Проведите прямую OA. На ней лежит диаметр, в отношении которого окружность будет симметрична. Касательная AB симметрична касательной AC. Точки B и C окружности симметричны. Значит, и отрезки AB и AC симметричны, а значит, равны (рис. 168). **5.** *Эвристическая подсказка.* Рассмотрите несколько случаев. *Ответ.* Рассмотрим два случая: 1) пусть центр симметрии параллелограмма не совпадает с центром квадрата. Тогда искомая прямая EF проходит через центры этих фигур (рис. 169); 2) пусть центр симметрии параллелограмма совпадает с центром квадрата. Тогда искомой прямой будет любая прямая, проходящая через общий центр фигур.

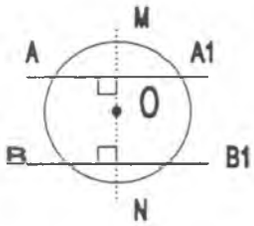


Рис 167

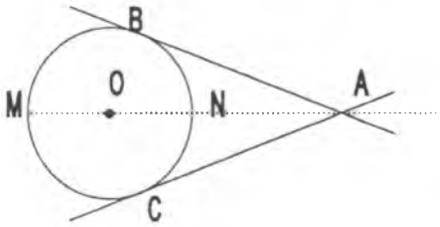


Рис 168

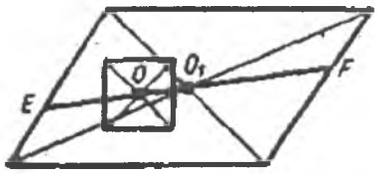


Рис 169

V. 1. *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Ответ.* В этой игре выигрывает первый, независимо от размера стола. Первым ходом он кладет пятак так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход другого игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому, при любом очередном ходе другого игрока, всегда возможен и симметричный ему ответный ход первого. Итак, первый игрок побеждает. **2.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Ответ.* Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположены по 9 вершин. После этого, на каждый ход другого соответствует аналогичным ходом по другую сторону от этой хорды. **3.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Ответ.* В обоих пунктах выигрывает второй игрок. Независимо от хода первого игрока, второй может после своего хода оставить два

одинаковых по количеству цепочек лепестков. Далее – симметрия. **4.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Решение.* Сначала столяр заметил, что выкройка доски – симметричная фигура с двумя осями симметрии. Затем он заметил, если половину продольной оси отверстия OA (рис. 170) отложить на поперечной оси $OO_1 = OA$ и $OO_2 = OA$ и соединить прямыми точки O_1 и A_1, а также O_2 и A, то каждая из фигур BO_1B_1 и CO_2C_1 будет составлять четверть круга с радиусом O_1B, а каждая из фигур ABC и $A_1B_1C_1$ – четверть круга с радиусом A_1B_1, равным половине радиуса O_1B_1. Столяр распилил каждую доску по прямым BA, CA, B_1A_1 и C_1A_1, из полученных 8 частей склеил аккуратно круглую крышку стола, как показано на рис. 171.

VII. 1. См. рис. 158. **2.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Решение.* Точки B и C симметричны относительно диаметра, который проходит через середину отрезка BP перпендикулярно к нему. Аналогично и точки A и B. Таким образом, при построении перпендикулярных прямых через середины отрезков AB и BC, получим точку их пересечения. Это центр окружности, потому что через него проходят оба диаметра (рис. 172).

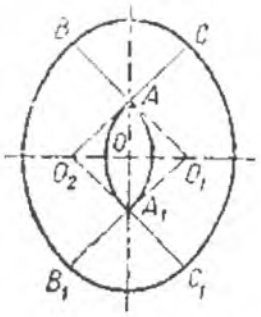
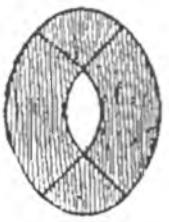


Рис 170



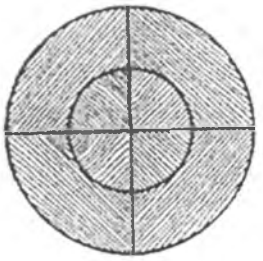


Рис 171

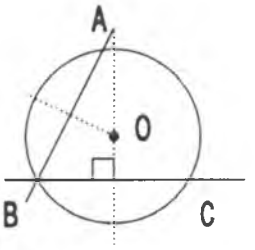


Рис 172

ЗАНЯТИЕ 8

V. 2.-3. *Эвристическая подсказка.* Переформируйте задачу, нарисуйте картинку. **4.** *Эвристическая подсказка.* Модифицируйте (изменяйте, преобразовывайте с появлением новых свойств): сделайте такие преобразования $36^0 : 2 = 18^0$, $36^0 \cdot 5 = 180^0$, $180^0 + 18^0 = 198^0$, $198^0 : 2 = 99^0$. **5.** Дополнением данного угла до 90^0 служит угол 36^0. Это дополнение следует разделить на два равных угла, каждый из которых составляет третью часть данного угла. **7.** *Подсказка.* Две точки перпендикуляра следует

построить по одну сторону от прямой AB. **8.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией относительно прямой AB. **9.** *Подсказка.* С центрами в точках A и B постройте две пересекающиеся дуги одинакового радиуса. Далее, с центрами в точках пересечения этих дуг C и D, постройте дуги одного радиуса, меньше AC, точки их пересечения E и F лежат на прямой AB между A и B. Такое построение можно повторить. **10.** *Эвристическая подсказка.* Рассмотрите несколько случаев расположения окружностей. *Ответ.* Имеем две окружности. Первая имеет радиус 5 - 3 = 2 *см* и касается до данной окружности внешним образом. Вторая окружность содержит данную, касаясь ее внутренним образом, и имеет радиус 5 + 3 = 8 *см.* **11.** *Эвристическая подсказка.* Рассмотрите несколько случаев расположения окружностей. *Ответ.* Задача имеет четыре решения: 1, 2, 3, 4. **12.** *Эвристическая подсказка.* Рассмотрите несколько случаев расположения окружностей. *Ответ.* Задача имеет четыре решения. Радиусы окружностей с центрами в вершинах соответственно противоположным сторонам 5, 6 и 7 могут равняться: 1) 4, 3, 2; 2) 9, 2, 3; 3) 2, 9, 4; 4) 3, 4, 9.

VI. 1. *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь осевой симметрией.

ЗАНЯТИЕ 10

II. Задача 2. Площадь стены равна 8,25 *м* · 4,32 *м* = 35,64 $м^2$. Площадь трех окон равна 3 · 2,2 *м* · 1,2 *м* = 7,92 $м^2$. Тогда площадь поверхности стены, покрытой штукатуркой, равна 27,72 $м^2$. **2.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку, введите подходящие обозначения. *Решение.* Площадь участка $S = ab$, т. е. $2000 = a \cdot 80$, откуда $a = 25$ *м*. Площадь отрезанного участка $Q = ax$ (где x – вторая сторона этого участка), т. е. $780 = 25 \cdot x$, откуда $x = 31{,}2$ *м*. Значит, нужно на большей стороне прямоугольника отложить $AK = x = 31{,}2$ *м* и провести прямую параллельно другой стороне прямоугольника.

ЗАНЯТИЕ 11

IV. 2. 1, 4, 2, 5, 3, 6. Грани 1, 2, 4 и 5 соседствуют с гранью 6. **3.** Развертками куба являются 1, 2, 4, 6-9. **4.** Рис. 173. **5.** 1 и 3. **6.** Развертка куба 5. **7.** 1), 3), 6); 2), 4), 5).

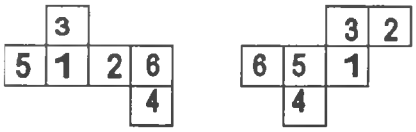


Рис 173

ЗАНЯТИЕ 13

III. 1. Острова, которые изображены на рис. 140, можно обойти, проходя по каждому мосту ровно один раз. А острова, изображены на рис. 141, нельзя так обойти, так как число нечетных узлов (в данном случае островов) больше двух. **2.** Рис. 174. **3.** *Эвристическая подсказка.* Ребра куба представляют собой пространственный граф. Подсчитайте в нем количество нечетных узлов, после чего можно будет ответить на вопрос. **4.** Рис. 175. Обход будет закончен в комнате 5. **5.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте соответствующий граф и движение начните с нечетного узла.

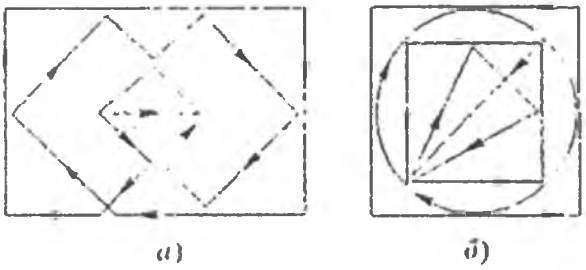


Рис. 174

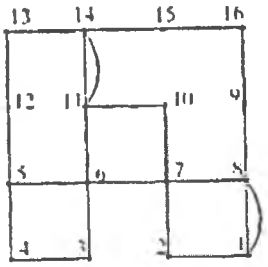


Рис. 175

IV. *Эвристическая подсказка.* Проверьте, какой граф можно нарисовать одним росчерком, а какой нельзя. *Ответ.* Рис. 176.

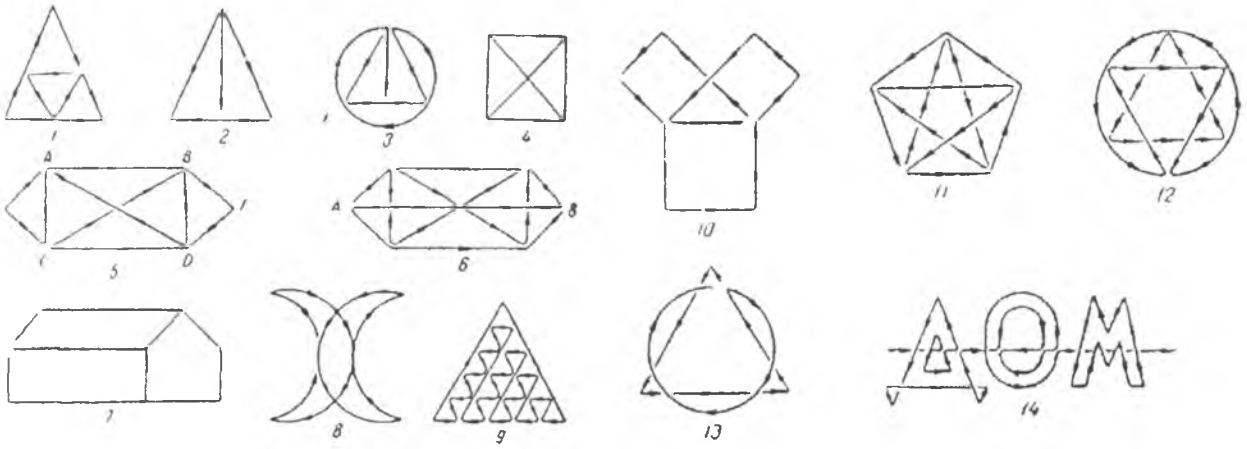


Рис. 176

II. 1. Рис. 177. **2.** *Эвристическая подсказка.* Проанализируйте условие задачи. *Ответ.* Рис. 178. **3.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку, не

ограничивая себя плоскостью, выйдите в пространство. *Ответ.* Рис. 179. **4.** Рис. 180. **5.** *а*) Рис. 18; *б*) рис. 182; *в*) рис. 183. **6.** 1). Рис. 184; 2). Рис. 185.

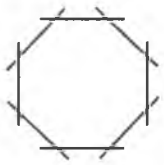


Рис. 177

Рис. 178

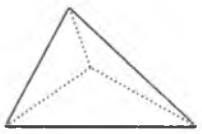


Рис. 179

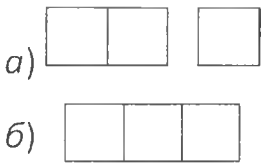


Рис. 180

Рис. 181

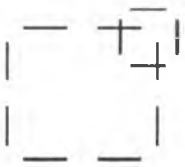


Рис. 182

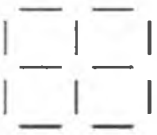


Рис. 183

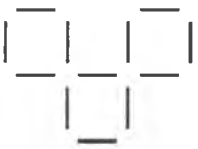


Рис. 184

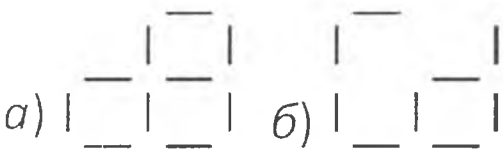


Рис. 185

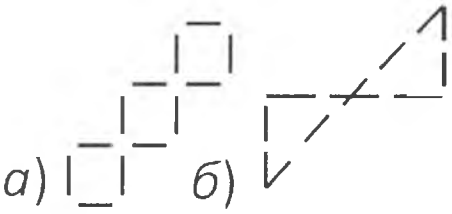


Рис. 186

7. Два варианта: рис. 186, *а, б.* **9.** Спички стоит положить, как показано на рис. 187, *а*; площадь этой фигуры равна площади «спичечного» квадрата, увеличенного в четыре раза. Как в этом убедиться? Дополним мысленно нашу фигуру до треугольника. Получится прямоугольный треугольник, основание которого равно 3, а высота 4 спичкам. Площадь его равна половине произведения основания на высоту: 0,5 $0,5 \cdot 3 \cdot 4 = 6$ квадратам со стороной в одну спичку (рис. 187, *б*). Но наша фигура имеет, пожалуй, площадь, меньше площадь прямоугольника на 2 «спичечных» квадрата и равна 4 таким квадратам. **10.** Нужно продолжить стороны «комнаты», которые идут «внутрь». Они ограничивают многоугольник, внутри которого стоит расположить источник света. **11.** Рис. 188. **12.** Рис. 189. **13.** *Эвристическая подсказка.* Рассмотрите разные варианты пересечения двух фигур. *Ответ.* На рис. 190 показано, как при пересечении двух четырехугольников могут образоваться два, три и четыре четырехугольника.

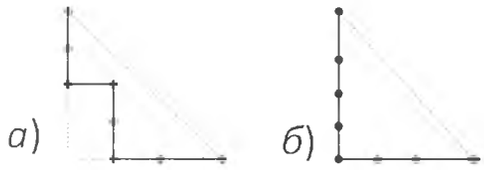


Рис. 187

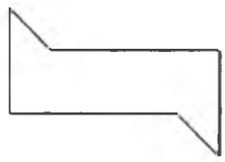


Рис. 188

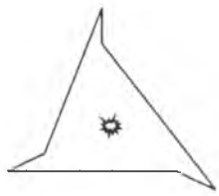


Рис. 189

Рис. 190

14. *Эвристическая подсказка.* Модифицируйте (изменяйте, преобразовывайте с появлением новых свойств): обратите внимание, на то, что 17-7 = 10, 10-7 = 3, 7-3 = 4, 4 - 3 = 1. **15.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **16.** Да, например, пятиконечная звезда. **17.** Во всех пунктах ответ «да». Пункт *в*) рис. 191. **18.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку. Введите подходящие обозначения. Рассмотрите несколько случаев. *Ответ.* Обозначим данные прямые a, b и c. Если a, b и c пересекаются в одной точке, то искомое геометрическое место составляет одну эту точку. Пусть эти прямые пересекаются в трех различных точках и образуют треугольник. В этом случае геометрическое место составляет четыре точки. Каждая точка является точкой пересечения биссектрисы одного из углов, образованных прямыми a и b, с биссектрисой угла, образованного прямыми a и c (или b и c). **19.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь неравенством треугольника. *Решение.* Понятно, что условию удовлетворяют точки прямой AB, которые находятся на целочисленных расстоянии от A (т. е. и от B). Пусть теперь точки A, M и B образуют треугольник и $AM = n$, где n – натуральное число. Тогда из неравенства треугольника следует, что $n-1 < BM < n+1$. Получается, $BM = n$. Таким образом, нам подходят еще точки серединного перпендикуляра к AB, которые находятся от его концов на целочисленных расстояния. **22.** Рис. 192. **23.** *а*). *Эвристическая подсказка.* Переберите все возможные варианты расположения трех кирпичей. *Ответ.*

Кирпичи расположите так, как показано на рис. 193. При этом образуется выемка в форме такой же кирпича. Поэтому, приложив линейку, как показано на рис. 193, можно измерить диагональ кирпича. *б*) *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь решением задачи из пункта *а*). *Ответ.* Надо обвести основание кирпича на листе, а затем сдвинуть его. **24.** *а*) 30^0; *б*) 150^0. **25.** Площадь трех внутренних кругов больше.

ЗАНЯТИЕ 15

I. 1. Надо знать величину периметра и площади прямоугольника. **2.** Например, можно задать такой вопрос: «Чему равна длина отрезка OO_1?». **3.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь неравенством треугольника. *Ответ.* Да; нет; нет. **5.** *Эвристическая подсказка.* Модифицируйте (изменяйте, преобразовывайте с появлением новых свойств): постройте угол, равный $19^0 \cdot 19$ и вычтите полный угол ($19^0 \cdot 19 - 360^0 = 1^0$). **6.** *Эвристическая подсказка.* Воспользуйтесь симметрией. *Ответ.* 1) вертикальная ось симметрии; 2) горизонтальная ось симметрии; 3) центральная симметрия; 4) вертикальная и горизонтальная ось симметрии; 5) нет симметрии. **8.** *а*), *б*), *г*). **9.** *Эвристическая подсказка.* Нарисуйте картинку, воспользуйтесь графическим моделированием. *Решение.* Если соединить левый и правый домики с 1-м, 2-м и 3-м колодцем, то средний домик окажется в одной из трех областей, которые образовались (рис. 194). Итак, из среднего домика невозможно без пересечения. «границы» области попасть ко 2-му колодцу (если домик в первой области), или до 3-го колодца (если домик во второй области), или до 1-го. *Ответ.* Нет, им помочь нельзя. **10.** *Эвристическая подсказка.* Возьмите какую-то точку *B* и постройте прямые, симметричные данным относительно *A*.

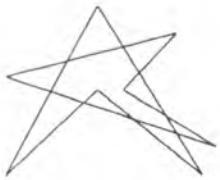


Рис. 191

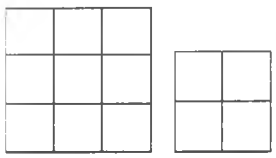


Рис. 192

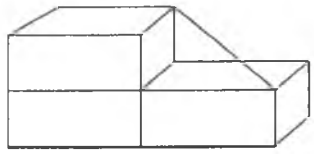


Рис. 193

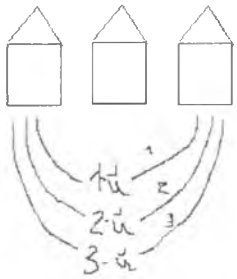


Рис. 194

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад / И.Л.Бабинская. – М.: Физматлит, 1975.

2. Балк М.Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике: пособие для учителей / М.Б.Балк. – М.: Просвещение, 1956. – 248 с.

3. Германович П.Ю. Вопросы и задачи на соображение для 8-10 кл.: пособие для учителей / П.Ю.Германович. – Л.: Учпедгиз, 1957. – 150 с.

4. Гончарова І.В. Евристики в геометрії / І.В.Гончарова, О.І.Скафа. – Харків: Видавн.група "Основа", 2004. – 112 с.

5. Гусев В.А. Внеклассная работа по математике в 6-8 кл.: кн. для учителя / В.А.Гусев, А.И.Орлов, А.Л.Розенталь. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1984. – 286 с.

6. Жаров В.А. Вопросы и задачи по геометрии: пособие для учителей / В.А.Жаров, П.С.Марголите, З.А.Скопец. – М.: Просвещение, 1965.

7. Камаев П. Древняя китайская головоломка «Семь хитроумных фигур» / П.Камаев // Математика. – № 14. – 2001.

8. Карп А.П. Математика. 7 кл.: дидакт. материалы к учебнику «Математика 7. Арифметика, алгебра, анализ данных» под пер. Г.В.Дорофеева / А.П.Карп, Л.П.Евстафьева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1999. – 176 с.

9. Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики: кн. для учителя / В.Г.Коваленко. – М.: Просвещение, 1990. – 94 с.

10. Кордемский Б.А. Увлечь школьников математикой: материал для клас. и внеклас. занятий / Б.А.Кордемский. – М.: Просвещение, 1981. – 112 с.

11. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А.Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968.

12. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения / Под ред. А.Я.Смородинского / Мартин Гарднер. – М.: Мир, 1971. – 510 с.

13. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.П.Бевз, А.Г.Конфорович, З.А.Резниченко, Е.А.Ченакал / Под ред. Г.П.Бевза. – К.: Рад. шк., 1982. – 152 с.

14. Математический кружок. Первый год обучения. 5-6 кл.: метод. разработки для преподавателей. – М.: Издательство АПН СССР, 1990. – 85 с.

15. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / А.Я.Блох, Е.С.Канин, Н.Г.Килина и др.; Сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А.Оганесян, Ю.М.Колягин, Г.Л.Луканкин, В.Я.Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

17. Методика факультативных занятий в 7-8 кл.: Избранные вопросы математики: пособие для учителей / Сост. И.Л.Никольская, В.ВФирсов. – М.: Просвещение, 1981. – 160 с.

18. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в 5-8 кл.: пособие для учителя / Т.Н.Миракова // Квантор. – Львов, 1991.

19. Мочалов Л.П. Головоломки / Л.П.Мочалов / Под ред. А.П.Савина. – М.: Наука, 1980.

20. Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты / Я.И.Перельман. – М.: Дет. лит., 1972.

21. Петраков И.С. Математические кружки в 7-8 кл.: кн. для учителя / И.С.Петраков. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.

22. Пожарская Т. Вечер КВН / Т.Пожарская // Математика. – № 25. – 1999.

23. Пойа Д. Как решать задачу / Д.Пойа. – М.: Учпедгиз, 1961.

24. Родионов В. Графы и кратчайшие расстояния в них / В.Родионов // Математика. – № 15. – 2001.

25. Спивак А.В. Математический праздник / А.В.Спивак. – М. 1995. – 78 с.

26. Чернышов В.А. Новый взгляд на преподавание геометрии: Планиметрия / В.А.Чернышов. – Ч. 1. – Донецк, 1999. – 75 с.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

1. Байиф Ж.-К. Логические задачи: Пер. с франц. / Перевод Сударева Ю.Н.; Под редакцией и с послесл. И. М. Яглома / Ж.-К.Байиф. – М.: Мир, 1983. – 172 с.

2. Болтянский В.Г. Геометрия для IX кл. ср. шк. / В.Г.Болтянский, И.М.Яглом. – К.: Рад. шк., 1963.

3. Варданян С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: кн. для учащихся 6-8 кл. сред. шк. / С.С.Варданян / Под ред. В.А.Гусева. – М.: Просвещение, 1989. – 144 с.

4. Вейль Г. Симметрия / Г.Вейль. – М.: Просвещение, 1968.

5. Ганчев И. Математический фольклор. Пер. с болг. / И.Ганчев, К.Чимев, Й.Стоянов. – М.: Знание, 1987. – 208 с.

6. Глаголев Н.А. Элементарная геометрия: для 6-8 кл. / Н.А.Глаголев. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз., 1954.

7. Гусев В.А. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов / В.А.Гусев. – М.: Просвещение, 1979.

8. Депман И.Я. За страницами учебника математики: пособие для учащихся 5-6 кл. сред. шк. / И.Я.Депман, Н.Я.Виленкин. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.

9. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки / Е.И.Игнатьев / Под ред. М.К.Потапова.– 2-е изд. – М.: Наука, 1979.

10. Карелін Л.З. Збірник геометричних задач і вправ на дослідження / Л.З.Карелін. – К.: Рад. шк., 1969.

11. Коба В.І. Найпростіші геометричні перетворення / В.І.Коба, М.А.Нікулін. – К.: Рад. шк., 1978.

12. Логические игры и задачи / Сост. Г.С.Шиманская, В.И.Шиманский. – Д.: Сталкер, 1998. – 448 с.

13. Лоповок Л.М. Збірник вправ з геометрії для 6-8 кл. / Л.М.Лоповок. – К.: Рад. шк., 1977.

14. Лэнгдон Н. С математикой в путь: [для мл. и сред. шк. возраста] / Н.Лэнгдон, С.Чарльз. – М.: Педагогика, 1987. – 47 с.

15. Мазаник А.А. Реши сам / А.А.Мазаник. – 2-е изд, перераб. – Мн.: Нар. Асвета, 1980. – 239 с.

16. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.П.Бевз, А.Г.Конфорович, З.А.Резниченко, Е.А.Ченакал / Под ред. Г.П.Бевза. – К.: Рад. шк., 1982. – 152 с.

17. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка: пособие для учащихся / Ф.Ф.Нагибин, Е.С.Канин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 160 с.

18. Перельман Я.И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки / Я.И.Перельман / Под ред. В. Г. Болтянского. – 8-е изд. перераб и доп. – М.: Наука, 1967 – 160 с.

19. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования: пособие для учащихся / Г.И.Саранцев. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Просвещение, 1981. – 112 с.

20. Сборник математических олимпиад: пособие для внеклассной работы по математике / Сост. А.А.Леман / Под ред. В.Г.Болтянского. – М.: Просвещение, 1965.

21. Скобелев Г.М. Математика: пособие для факультативных занятий в 7 кл. / Г.М.Скобелев, В.П.Берман, Ю.А.Артамонов. – К.: Рад. шк., 1969.

22. Спивак А.В. Математический праздник / А В.Спивак. – М. 1995. – 78 с.

23. Факультативный курс. Избранные вопросы математики (7-8 кл.). – М.: Просвещение, 1978. – 192 с.

24. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике: кн. для учащихся / Л.М.Фридман. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.

25. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7 (теория, задачи) / И.Ф.Шарыгин. – М.: Мирос, 1995. – 442 с.

26. Шарыгин И.Ф. Математический винегрет / И.Ф.Шарыгин. – М.:

Агенство «Орион», 1991.

27. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия, 5-6 кл.: пособие для общеобр. учеб. заведений / И.Ф.Шарыгин, Л.Н.Ерганжиева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1999. – 192 с.

28. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве / А.В.Шубников, В.А.Копцик. – М.: Просвещение, 1968.