Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

IV етап

Розв'язання та відповіді
Другий день

8.5. Коротульки-малюки Незнайко, Знайко та Поспішайко одночасно вирушили в подорож із Квіткового міста до Зеленого міста, відстань між якими становить 1,7 км. Швидкості їхнього руху пішки дорівнюють 4 м/хв, 5 м/хв та 6 м/хв відповідно. У них є один моторолер, швидкість якого — 20 м/хв. Один з коротульок спочатку поїхав на моторолері, а двоє інших вийшли пішки. Проїхавши певну відстань, він залишив моторолер на дорозі й продовжив свій шлях пішки. Коротулька, що першим дістався до моторолера, поїхав на ньому і через деякий час також залишив його на дорозі, продовживши свій шлях пішки. Урешті-решт, третій із мандрівників, дійшовши до моторолера, прибув на ньому до Зеленого міста, причому — одночасно з двома іншими коротульками. Скільки часу кожен з малюків їхав на моторолері?

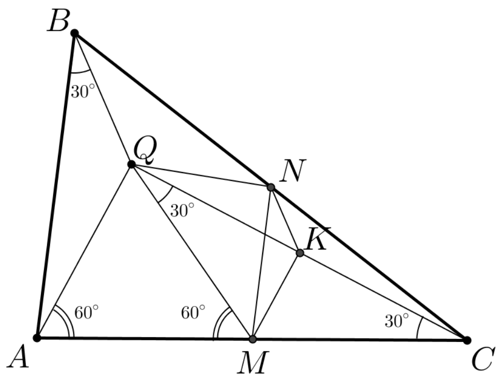
Розв'язання. Нехай кожен з коротульок витратив на всю подорож t хв. Незнайко їхав на моторолері x хв, Знайко — y хв, а Поспішайко — z хв. Тоді маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 20x+4(t-x)=1700, \\ 20y+5(t-y)=1700, \\ 20z+6(t-z)=1700, \\ 20(x+y+z)=1700. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $t=253$, $x=43$, $y=29$, $z=13$.

Відповідь: Незнайко, Знайко та Поспішайко їхали на моторолері 43 хв, 29 хв та 13 хв відповідно.

8.6. Усередині гострокутного трикутника ABC позначено таку точку Q, що $\angle QAC=60^\circ$, $\angle QCA=\angle QBA=30^\circ$. Нехай точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Знайдіть величину кута QNM.



Розв'язання. Маємо, що $\angle AQC=90^\circ$. Нехай K — середина відрізка QC. Тоді $MN \parallel AB$, $NK \parallel BQ$. Отже, $\angle MNK=\angle ABQ=30^\circ$. Звідси випливає, що $\angle MNK=\angle MQK$, адже $\angle MQK=30^\circ$. Відтак, навколо чотирикутника $QNKM$ можна описати коло. Оскільки $MK \perp QC$, то $\angle QNM=\angle QKM=90^\circ$.

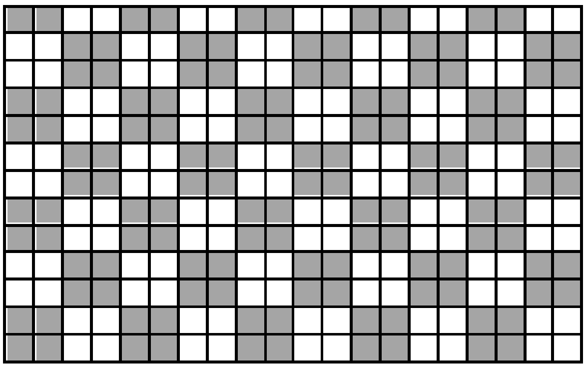
Відповідь: $\angle QNM = 90°$.

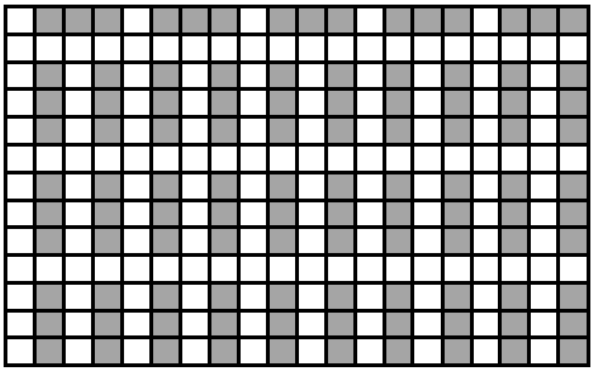
8.7. Знайдіть усі такі цілі n, для яких $n+3$ та n^2+3n+3 одночасно будуть кубами цілих чисел.

Розв'язання. Якщо числа $n+3$ і n^2+3n+3 будуть точними кубами, то кубом цілого числа має бути й число $(n+3)(n^2+3n+3)=(n+2)^3+1$. Звідси, з необхідністю, $n=-2$ або $n=-3$. Перевірка залишає нам лише $n=-2$.
Відповідь: $n=-2$.

8.8. Яку найбільшу кількість триклітинкових прямокутників (у будь-якій орієнтації) можна зафарбувати на клітчастій дошці розміру 20×13 так, щоб жодні два зафарбовані прямокутники не мали спільних точок?

Розв'язання. Виділимо на дошці розміру 20×13 30 квадратів 2×2 та 5 двоклі-





тинкових прямокутників (далі — *виділені* фігурки) так, як зображено на малюнку ліворуч. Кожен триклітинковий прямокутник має спільні клітинки рівно з однією із 35 виділених фігурок. З іншого боку, відповідно до вимог умови задачі кожна із 35 виділених фігурок має спільні клітинки не більше, аніж з одним із триклітинкових прямокутників. Отже, триклітинкових прямокутників повинно бути не більше за 35. На малюнку праворуч зображено потрібне розташування 35 триклітинкових прямокутників.
Відповідь: 35 триклітинкових прямокутників.

9.5. Розв'яжіть рівняння $\left[x\{x[x]\}\right]=x^2$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

Розв'язання. Помітимо, що $x=0$ є коренем рівняння. Далі вважаємо, що $x\neq0$. Запишемо наше рівняння у вигляді $\left[x\left\{x\left(x-\{x\}\right)\right\}\right]=x^2$, $\left[x\left\{x^2-x\{x\}\right\}\right]=x^2$.

Оскільки x^2 — ціле число, то маємо: $\left[x\left\{-x\{x\}\right\}\right]=x^2$. Звідки

$$0<x^2\le x\left\{-x\{x\}\right\}<x^2+1. \ (*)$$

Позаяк ми розглядаємо $x\neq0$, то, зрозуміло, $\left\{-x\{x\}\right\}>0$ (якщо $\left\{-x\{x\}\right\}=0$, то $x^2=\left[x\left\{-x\{x\}\right\}\right]=0$, $x=0$). З нерівностей (*) маємо, що $x>0$. Далі,

$0 < x < \{-x\{x\}\} < 1$, і тому $x = \{x\}$. Але тоді $\{-x\{x\}\} = \{-x^2\} = 0$, адже x^2 — ціле число.
Відповідь: $x = 0$.

9.6. Нехай a, b і c — дійсні числа з проміжку $(0; 1]$. Доведіть, що має місце нерівність $a+b+c+|a-b|+|b-c|+|c-a| \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

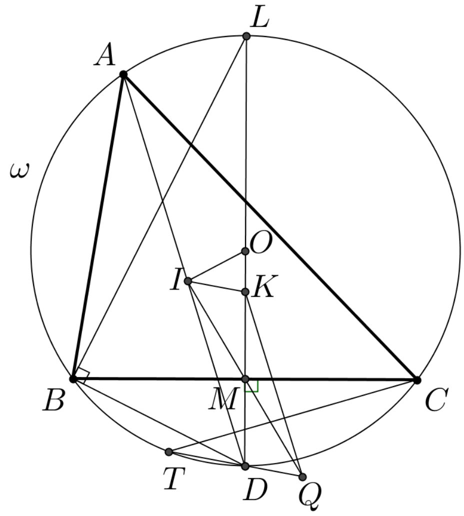
Розв'язання. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $0 < a \le b \le c \le 1$. Тоді маємо для доведення нерівність

$$\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}-b\right)+\left(\frac{1}{c}-3c\right) \ge 0.$$

Для $a > 0$ $\frac{1}{a}+a \ge 2$. Якщо $0 < b \le 1$, то $\frac{1}{b}-b \ge 0$. Для $0 < c \le 1$ неважко одержати нерівність $\frac{1}{c}-3c \ge -2$. Додавши ці три нерівності, одержимо потрібну нерівність.

9.7. Див. задачу 8.8.

9.8. Навколо гострокутного трикутника ABC, у якому $AB < BC < AC$, описано коло ω з центром O. Позначимо через I центр вписаного кола даного трикутника, а через M — середину сторони BC. Нехай точка Q симетрична точці I відносно M, півпряма OM перетинає коло ω в точці D, а півпряма QD вдруге перетинає коло ω в точці T. Доведіть, що $\angle ACT = \angle DOI$.



Розв'язання. Нехай DL — діаметр кола ω, точка K симетрична D відносно прямої BC. Чотирикутник $QDIK$ є паралелограмом.

У прямокутному трикутнику DBL $DB^2 = DM \cdot DL$. Як відомо, $DB = DI$ (лема про «тризуб»). Отже, $DI^2 = DM \cdot DL = 2DM \cdot DO = DK \cdot DO$, $\frac{DI}{DK} = \frac{DO}{DI}$. Тому трикутники DOI і DIK подібні, і $\angle IOD = \angle KID$.
Відтак, одержуємо:

$$\angle DOI = \angle KID = \angle KIQ + \angle QID = \angle DQI + \angle QID = 180^\circ - \angle IDQ =$$
$$= \angle IDT = \angle ADT = \angle ACT.$$

10.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(1-\sin x, 1-\cos x).$$

(Для $a \le b$ $\min(a, b) = \min(b, a) = a$.)

Розв'язання.
Умова задачі рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x < 1-\sin x,\\ \sin x < 1-\cos x;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 1-\sin x,\\ \cos x < 1-\cos x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Маємо:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x < \dfrac{1}{2},\\ \cos x < \dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x+\cos x<1.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n;\, 2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

10.6. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність $3p^q-2q^{p-1}=19$.

Розв'язання. Зрозуміло, що слід розглядати тільки $p\geq 3$. Якщо $p=q$, то маємо рівність $\left(3p^{p-2}-2p^{p-3}\right)p^2=19$, яка для простого $p\geq 3$ є неможливою.

Розглядаємо далі $p\neq q$. За Малою теоремою Ферма $q^{p-1}-1\equiv 0\pmod p$, $p^{q-1}-1\equiv 0\pmod q$. Подаємо задану рівність у вигляді $3p^q-2\left(q^{p-1}-1\right)=21$, і оскільки ліва частина цієї рівності ділиться без остачі на p, робимо висновок, що $p=3$ або $p=7$. Далі, записавши вихідну рівність у вигляді $3p\left(p^{q-1}-1\right)-2q^{p-1}=19-3p$, одержуємо, що $19-3p$ ділиться без остачі на q.

Подальшим нескладним перебором дістанемо відповідь.

Відповідь: $p=3$, $q=2$; $p=7$, $q=2$.

10.7. Чи можна в просторі відмітити 24 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та провести рівно 2013 різних площин так, щоб кожна містила не менше трьох відмічених точок, і будь-яка трійка відмічених точок належала хоча б одній з цих площин?

Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Позначимо через π_1, π_2, …, π_{2013} ці площини, а через n_1, n_2, …, n_{2013} — кількості відмічених точок, що, відповідно, їм належать. Тоді, за умовою задачі, $n_i\geq 3$ для кожного i, $1\leq i\leq 2013$. Зрозуміло, що

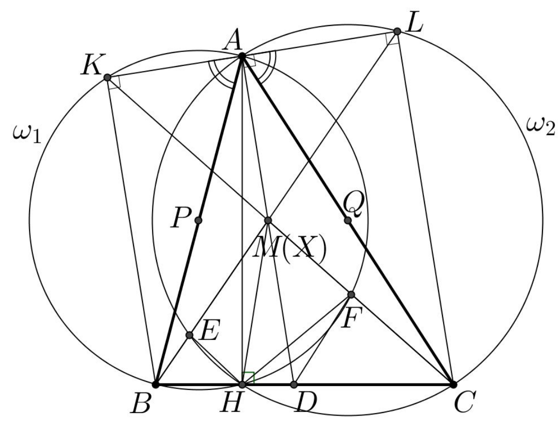
$$C_{n_1}^3+C_{n_2}^3+\ldots+C_{n_{2013}}^3=C_{24}^3=2024.$$

До того ж, $n_i\leq 5$ для всіх i, $1\leq i\leq 2013$, бо якщо серед n_1, n_2, …, n_{2013} знайдеться хоча б одне число, яке більше 5, то матимемо:

$$2024 = C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + ... + C_{n_{2013}}^3 \geq \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{2012 доданків}} + C_6^3 = 2012 + 20 = 2032,$$

що є хибним.
Нехай серед чисел n_1, n_2, … , n_{2013} рівно a чисел дорівнюють 3, рівно b чисел дорівнюють 4 і рівно c чисел дорівнюють 5. Тоді $a+b+c=2013$, і $C_3^3 \cdot a + C_4^3 \cdot b + C_5^3 \cdot c = 2024$. Звідки одержуємо рівність $3b+9c=11$, яка не може виконуватись для цілих невід'ємних b і c. Одержана суперечність завершує розв'язання.
Відповідь: ні, неможливо.

10.8. Нехай точка M — середина бісектриси AD гострокутного трикутника ABC. Коло з діаметром AC перетинає відрізок BM у точці E, а коло з діаметром AB перетинає відрізок CM у точці F. Доведіть, що точки B, E, F і C лежать на одному колі.
Розв'язання. Якщо $AB = AC$, то твердження задачі є очевидним. Без обмеження загальності вважатимемо, що $AB < AC$. Нехай AH — висота трикутника ABC. Тоді точка H лежить між точками B і D. Відрізок AH — спільна хорда кіл ω_1 та ω_2, побудованих як на діаметрах на відрізках AB і AC відповідно. Через вершину A проведемо пряму, перпендикулярну до AD, яка перетинає кола ω_1 і ω_2 у відмінних від A точках K і L відповідно.

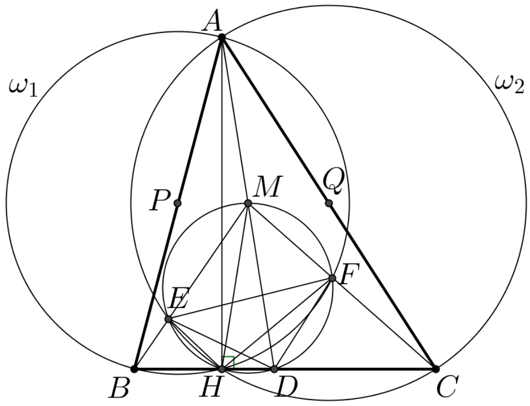


Доведемо, що пряма BL проходить через точку M. Позначимо через X точку перетину прямих BL і AD. Оскільки $KB \parallel AD \parallel LC$, то отримуємо такі пропорції:

$$\frac{AX}{KB} = \frac{LA}{LK}, \ \frac{DX}{CL} = \frac{BD}{BC}, \ \frac{BD}{BC} = \frac{KA}{KL}.$$

Отже, $AX = \dfrac{KB \cdot LA}{LK}$, $DX = \dfrac{CL \cdot KA}{KL}$. Далі, $\angle KAB = \angle LAC$, і трикутники AKB і ALC подібні. Звідси $\dfrac{KA}{LA} = \dfrac{KB}{LC}$, $LC \cdot KA = KB \cdot AL$. Відтак, $AX = DX$, тобто точка X збігається з точкою M. Аналогічно доводиться, що пряма CK також проходить через точку M.
Маємо: $\angle DME = \angle LMA = \angle CLE = 180° - \angle DHE$ (ми використали, що чотирикутник $ELCH$ вписаний у коло ω_2). Це означає, що точки E, M, D і H лежать на одному колі. Чотирикутник $KBHF$ вписаний у коло ω_1, і тому $\angle DMF = \angle KMA = \angle MKB = 180° - \angle BHF = \angle DHF$, звідки випливає, що точки M, H, D і F лежать на одному колі.

Ми довели, що точки M, E, H, D і F лежать на одному колі. У прямокутному трикутнику HAD відрізок HM — медіана, проведена до гіпотенузи. Тому



$MD = MH$. Відтак, $\angle MDH = \angle MHD = \angle MED = \angle MFH$. Розглянемо трикутники MDE і MBD, в яких кут при вершині M спільний, а $\angle MED = \angle MDB$. Отже, $180^\circ - \angle CFE = \angle MFE = \angle MDE = \angle MBD$. З цього й одержуємо, що чотирикутник $BEFC$ вписаний.

Зауваження. Для гострокутного трикутника ABC легко довести, що середина бісектриси AD лежить усередині обох кіл ω_1 і ω_2. Насправді, побудуємо квадрат $ABTS$ так, щоб точки T, C і S лежали по один бік від прямої AB. Нехай G — основа перпендикуляра, проведеного з точки B до прямої AD. Тоді $AG = AB\cos\angle BAD > AB\cos 45^\circ = \frac{AT}{2} > \frac{AD}{2} = AM$, і тому кут AMB тупий. Аналогічно доводиться, що кут AMC також тупий.

11.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x).$$

(Для $a \le b$ $\min(a, b) = \min(b, a) = a$.)

Розв'язання. З урахуванням області допустимих значень та періодичності достатньо розв'язувати нерівність на множині $(0; 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Розглянемо такі випадки.

а) Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, то $0 < \sin x \le \cos x$ і $0 < \operatorname{tg} x \le \operatorname{ctg} x$. У цьому випадку вихідна нерівність рівносильна нерівності $\sin x < \operatorname{tg} x$, котра виконується для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Якщо $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $0 < \cos x < \sin x$ і $0 < \operatorname{ctg} x < \operatorname{tg} x$. Наша нерівність матиме вигляд $\cos x < \operatorname{ctg} x$, що, зрозуміло, виконується на розглядуваному проміжку.

в) Якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то

$$\min(\sin x,\ \cos x) = \cos x > -1,$$

$$\min(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) \le \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x} \le -1.$$

Отже, на проміжку $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ вихідна нерівність не виконується.

г) Якщо $x \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\min(\sin x,\ \cos x) < 0 < \min(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)$, тобто вихідна нерівність виконується.

д) Якщо $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, то $\min(\sin x,\ \cos x) = \sin x > -1$, $\min(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) \le -1$, і тому наша нерівність не виконується.

Відповідь: $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

11.6. Див. задачу 9.6.

11.7. Знайдіть усі натуральні числа n, для кожного з яких існують такі натуральні числа p і q, що $\left(n^2+2\right)^p = (2n-1)^q$.

Розв'язання. Очевидно, що $n \le 4$ умову задачі не задовольняють. Безпосередньо перевіряємо, що $n = 5$ задовольняє умову.

Далі вважаємо, що $n \ge 6$. Якщо r є простим дільником числа n^2+2, то $r \mid 2n-1$, і навпаки: якщо r — простий дільник числа $2n-1$, то $r \mid n^2+2$.

Отже, візьмемо спільний простий дільник r чисел n^2+2 і $2n-1$. Маємо: $n^2+2 = rk$, $2n-1 = rl$, де k і l — натуральні числа. Тоді $(2n)^2 + 8 = 4rk$, $(rl+1)^2 + 8 = 4rk$, $r^2l^2 + 2rl + 9 = 4rk$, і тому $r \mid 9$. Оскільки число r просте, то $r = 3$. Ми встановили, що $n^2+2 = 3^m$, $2n-1 = 3^s$, де m і s — натуральні числа, причому $m > s \ge 3$. Але з останніх двох рівностей випливає, що

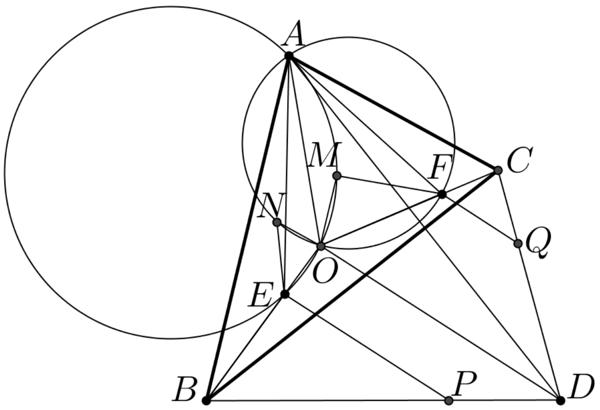
$$\left(3^s+1\right)^2 + 8 = 4\cdot 3^m,\ 3^{2s} + 2\cdot 3^s + 9 = 4\cdot 3^m.$$

Отже, $3^s \mid 9$, що неможливо для $s \ge 3$.

Відповідь: $n = 5$.

11.8. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На відрізках OB і OC вибрали точки E і F відповідно так, що $BE = OF$. Позначимо через M і N середини дуг AOE і AOF описаних кіл трикутників AOE і AOF відповідно. Доведіть, що $\angle ENO + \angle FMO = 2\angle BAC$.

Розв'язання. Нехай точка D симетрична точці A відносно прямої BC. Тоді $\angle AOC = 2\angle ABC = \angle ABD$. Оскільки $OA = OB$ і $BA = BD$, то трикутники AOC і ABD подібні. Аналогічно, $\angle AOB = \angle ACD$, і трикутники AOB та ACD подібні. З подібності названих трикутників випливає існування на відрізках BD і CD таких точок P і Q відповідно, що $\angle APB = \angle AFO$ і $\angle AQC = \angle AEO$. Оскільки $\angle ABP = \angle AOF$, то подібними будуть трикутники ABP і



AOF. Маємо: $\dfrac{BP}{BD} = \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{OF}{OA} = \dfrac{BE}{BO}$. Отже, $PE \parallel DO$. Аналогічно доводиться, що $QF \parallel DO$. Трикутник AME є рівнобедреним. До того ж, $\angle AME = \angle AOE = \angle AOB$. Це означає, що трикутники AME і AOB подібні. Звідси одержуємо, що $\angle BAE = \angle OAM$ і $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AO}{AM}$, а тому подібними будуть трикутники BAE і OAM. З подібності цих трикутників випливає, що $\dfrac{OM}{BE} = \dfrac{AO}{AB}$ і $\angle AOM = \angle ABE$. Далі, трикутник AOF подібний трикутнику ABP, і $\dfrac{OA}{BA} = \dfrac{OF}{BP}$, $\angle AOF = \angle ABP$. Відтак, $\dfrac{OM}{BE} = \dfrac{OF}{BP}$ і $\angle MOF = \angle EBP$, адже $\dfrac{OM}{BE} = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{OF}{BP}$ і $\angle MOF = \angle AOF - \angle AOM = \angle ABP - \angle ABE = \angle EBP$. Ми встановили, що трикутники MOF і EBP подібні. Аналогічно доводиться подібність трикутників NOE і FCQ. У результаті маємо:

$$\angle ENO + \angle FMO = \angle QFC + \angle PEB = \angle DOC + \angle DOB = \angle BOC = 2\angle BAC,$$

що й треба було довести.

Задачі запропонували:

8.5	О. Б. Панасенко	**10.5**	В. М. Лейфура
8.6	І. П. Нагель	**10.6**	В. А. Ясінський
8.7	І. М. Мітельман, В. А. Ясінський	**10.7**	В. М. Радченко, В. А. Ясінський
8.8	І. М. Мітельман, В. А. Ясінський	**10.8**	В. А. Ясінський
9.5	І. М. Мітельман	**11.5**	В. М. Лейфура
9.6	В. А. Ясінський	**11.6**	Див. задачу 9.6
9.7	Див. задачу 8.8	**11.7**	І. М. Мітельман, В. А. Ясінський
9.8	В. А. Ясінський	**11.8**	В. А. Ясінський