Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

LIII Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

IV етап

Розв'язання та відповіді

Перший день

8.1. Для невід'ємних чисел x і y має місце рівність $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$. Яких значень може набувати вираз $\sqrt{x+y}-\sqrt{2xy}$?

Розв'язання. Для $x \ge 0$, $y \ge 0$ $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x+y=2xy+2\sqrt{xy}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x+y=2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{2xy}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Зауваження. Невід'ємні числа x і y, що задовольняють умову, насправді існують.

8.2. Чи можливо виписати в рядок усі натуральні числа від 1 до 24 так, щоб можна було вибрати щонайбільше чотири числа (не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку зростання, та щонайбільше шість чисел (також не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку спадання?

Розв'язання. Покажемо, що це можливо:

$6, 5, 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 24, 23, 22, 21, 20, 19$.

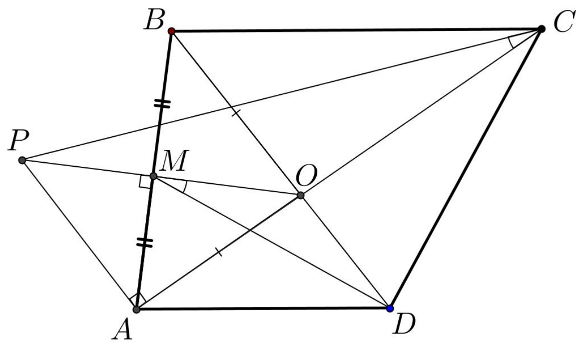
Відповідь: так, можна.

8.3. Відомо, що для натуральних k, m, n і q виконується рівність $2\left(k^2+km\right)+m^2+n^2=2013^q$, причому числа k і m — взаємно прості. Доведіть, що числа n і k^2+km не є взаємно простими.

Розв'язання. Маємо рівність $k^2+(k+m)^2+n^2=2013^q$. Оскільки $(k;m)=1$[1], то $(k;k+m)=1$. Припустимо, що n і k^2+km — взаємно прості числа. Тоді $(n;k)=1$ і $(n;k+m)=1$. Отже, серед чисел k, $k+m$ і n не більше за одне парне. І тому $k^2+(k+m)^2+n^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ чи $k^2+(k+m)^2+n^2\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Але ж $2013^q\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, і одержуємо суперечність.

Зауваження. Для $k=10$, $m=33$, $n=8$ маємо: $10^2+(10+33)^2+8^2=2013$.

8.4. Нехай M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$, O — точка перетину її діагоналей, причому $AO=BO$. На півпрямій OM позначили таку точку P, що $\angle PAC=90°$. Доведіть, що $\angle AMD=\angle APC$.



Розв'язання. Трикутники AOD і COB подібні, і тому $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$. Оскільки AM — висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника APO, то маємо: $OC\cdot OD=OA\cdot OB=OA^2=OM\cdot OP$. Отже, $\frac{OC}{OM}=\frac{OP}{OD}$. Півпряма OM — бісектриса кута AOB, і $\angle MOD=\angle COP$. Звідси випливає подібність трикутників OCP і OMD. Відтак, $\angle OCP=\angle OMD$, $90°-\angle OCP=90°-\angle OMD$, тобто $\angle APC=\angle AMD$.

9.1. Для кожного дійсного невід'ємного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1$.

Розв'язання. Для $a=0$ єдиним розв'язком є $x=1$. Нехай тепер $a>0$. Тоді слід розглядати тільки $x\geq 0$. Зауважимо, що $x=1$ є розв'язком для кожного $a>0$. Нехай $x\neq 1$. Маємо:

$$\begin{cases}\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}\sqrt{x}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{a}\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{x}+1,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

[1] Символом $(a;b)$ позначено найбільший спільний дільник натуральних чисел a і b.

Відповідь: якщо $a \in [0; 1) \cup \{4\}$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = 1$; якщо $a \in [1; 4) \cup (4; +\infty)$, то рівняння має два розв'язки $x = \left(\sqrt{a} - 1\right)^2$ і $x = 1$.

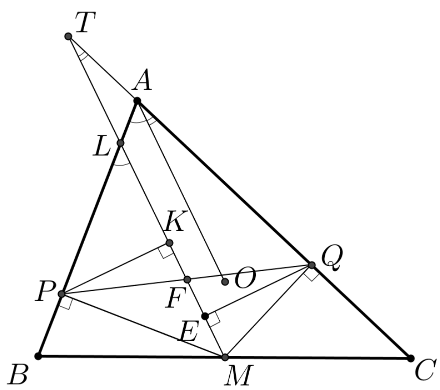
9.2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких $\frac{(m + 3n)^2}{m^2 + n^2}$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Нехай m і n такі натуральні числа, що $\frac{(m + 3n)^2}{m^2 + n^2} = k^2$, де $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ (ми врахували, що $(m + 3n)^2 > m^2 + n^2$). Тоді

$$\left(k^2 - 1\right)m^2 - 6nm + \left(k^2 - 9\right)n^2 = 0.$$

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно m, для його дискримінанта одержуємо, що $4n^2\left(9 - \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 - 9\right)\right)$ є квадратом цілого числа. Для $k \geq 4$ $\left(k^2 - 1\right)\left(k^2 - 9\right) > 9$. Для $k = 2$ число $4n^2\left(9 - \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 - 9\right)\right) = 96n^2$ не є точним квадратом. Залишається розглянути випадок $k = 3$. Маємо, як неважко бачити, рівність $4m = 3n$. Звідки $m = 3l$, $n = 4l$, де $l \in \mathbf{N}$.
Відповідь: $m = 3l$, $n = 4l$, де $l \in \mathbf{N}$ — довільне.

9.3. Нехай M — середина сторони BC гострокутного трикутника ABC, в якому $AB \neq AC$, O — центр його описаного кола. Проведемо з точки M перпендикуляри MP і MQ до сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину відрізка PQ і точку M, є паралельною прямій AO.



Розв'язання. Без обмеження загальності вважаємо, що $AB < AC$. Нехай F — така точка відрізка PQ, що $FM \parallel AO$. Покажемо, що F — середина відрізка PQ. Проведемо з точок P і Q перпендикуляри PK і QE до прямої MF. Доведемо рівність $PK = QE$, з якої і випливатиме потрібний факт.
Позначимо через L і T точки перетину прямої MF з прямими AB і AC відповідно. Тоді

$$\angle BLM = \angle BAO = 90° - \angle C,\ \angle CTM = \angle CAO = 90° - \angle B.$$

З відповідних прямокутних трикутників маємо:

$$PM = \frac{1}{2} BC \sin \angle B,$$

$$PK = PM \sin \angle PML = PM \cos \angle BLM = PM \sin \angle C = \frac{1}{2} BC \sin \angle B \sin \angle C.$$

Аналогічно,

$$QM = \frac{1}{2} BC \sin \angle C,$$

$$QE = QM \sin \angle QMT = QM \cos \angle CTM = QM \sin \angle B = \frac{1}{2} BC \sin \angle C \sin \angle B.$$

Отже, $PK = QE$, що й треба було довести.

9.4. Нехай $m \geq 35$ — задане натуральне число. Відомо, що в суді племені Мумбо-Юмбо працює m суддів. Для прискореного розгляду справ Верховний шаман племені вирішив утворити суддівські трійки так, щоб кожні дві трійки мали хоча б одного спільного суддю. Яку найбільшу кількість суддівських трійок може утворити Верховний шаман?

Розв'язання. Візьмемо одного із суддів. Якщо утворити всі можливі трійки з m суддів так, щоб до складу кожної з них входив цей суддя, то всі утворені суддівські трійки задовольнятимуть умову задачі, причому їх буде рівно $C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Доведемо, що більшої кількості суддівських трійок отримати неможливо. Припустимо, що з дотриманням умови задачі утворилося N суддівських трійок, причому $N \geq C_{m-1}^2 + 1$. Нехай одна з таких трійок — назвемо її *основною* — складається із суддів A_0, A_1 і A_2. Через $M(A_0)$, $M(A_1)$, $M(A_2)$ позначимо множини всіх суддівських трійок (*за винятком основної*), до складу яких входять судді A_0, A_1, A_2 відповідно (дані множини можуть мати й спільні трійки). За припущенням, будь-яка з $N-1$ неосновних суддівських трійок повинна належати одній з цих множин. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б одна з множин $M(A_0)$, $M(A_1)$, $M(A_2)$ містить не менше за $\frac{N-1}{3}$ суддівських трійок, причому $\frac{N-1}{3} \geq \frac{(m-1)(m-2)}{6}$. Нехай, для визначеності, це буде множина $M(A_0)$. У ній знайдеться менше, ніж $2(m-2)$ суддівських трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входять або суддя A_1, або суддя A_2. Оскільки $2(m-2) < \frac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0 A_3 A_4$, що $A_3 \notin \{A_1, A_2\}$ і $A_4 \notin \{A_1, A_2\}$. Аналогічно, у множині $M(A_0)$ існує менше, ніж $4(m-2)$ трійок, до складу яких одночасно із суддею

A_0 входить принаймні один із суддів A_i, $1 \le i \le 4$. Оскільки $4(m-2) < \frac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_5A_6$, що $A_5 \not\in \{A_i \mid 1 \le i \le 4\}$ і $A_6 \not\in \{A_i \mid 1 \le i \le 4\}$. Урешті-решт покажемо, що в множині $M(A_0)$ знайдеться суддівська трійка $A_0A_7A_8$, у якій $A_7 \not\in \{A_i \mid 1 \le i \le 6\}$, $A_8 \not\in \{A_i \mid 1 \le i \le 6\}$. Для цього нам знадобиться більш точна оцінка кількості неосновних трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входить хоча б один із суддів A_i, $1 \le i \le 6$. У добутку $6(m-2)$ кожна із C_6^2 суддівських трійок вигляду $A_0A_iA_j$, $1 \le i \ne j \le 6$, враховується двічі, до того ж, основну трійку $A_0A_1A_2$ слід узагалі виключити з розгляду. Отже, у множині $M(A_0)$ існує не більше, ніж $6(m-2) - C_6^2 - 1 = 6m - 28$ потрібних нам трійок. Оскільки $6m - 28 < \frac{(m-1)(m-2)}{6}$ для $m \ge 35$, то й маємо потрібний результат.
Далі, за умовою задачі будь-яка із N утворених суддівських трійок має хоча б одного спільного суддю з кожною з чотирьох суддівських трійок $A_0A_1A_2$, $A_0A_3A_4$, $A_0A_5A_6$ і $A_0A_7A_8$. Зрозуміло, що одним із спільних членів таких трійок мусить бути суддя A_0, бо якщо він не входить до деякої суддівської трійки, то до її складу повинні входити хоча б по одному судді з кожної з множин $\{A_1, A_2\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\{A_5, A_6\}$, $\{A_7, A_8\}$, що неможливо. Отже, усі утворені суддівські трійки мають спільного суддю A_0, а це означає, що $N \le C_{m-1}^2$. Дістали суперечність.

Відповідь: $C_{m-1}^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

10.1. Для дійсних чисел x, y, z і t виконуються рівності

$$\{x+y+z\} = \{y+z+t\} = \{z+t+x\} = \{t+x+y\} = \frac{1}{4}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу $\{x+y+z+t\}$. (Тут $\{a\} = a - [a]$, а $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.)

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що

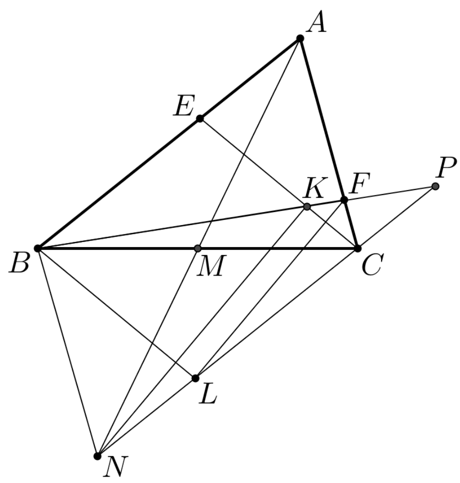
$$x+y+z = [x+y+z] + \frac{1}{4},\ y+z+t = [y+z+t] + \frac{1}{4},$$

$$z+t+x = [z+t+x] + \frac{1}{4},\ t+x+y = [t+x+y] + \frac{1}{4}.$$

Отже, $3(x+y+z+t)=[x+y+z]+[y+z+t]+[z+t+x]+[t+x+y]+1$. Це означає, що $3(x+y+z+t)$ — ціле число, тобто дробова частина числа $x+y+z+t$ дорівнює 0, $\frac{1}{3}$ або $\frac{2}{3}$.

Усі ці значення досягаються. Для того, щоб у цьому переконатись, розглянемо випадки $x=y=z=t=\frac{3}{4}$, $x=y=z=t=\frac{1}{12}$, $x=y=z=t=\frac{5}{12}$.

Відповідь: $0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.



10.2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC. На його сторонах AB і AC позначили відмінні від вершин довільні точки E і F відповідно. Нехай K — точка перетину прямих BF і CE, L — така точка, що $CL \parallel AB$ і $BL \parallel CE$, а N — точка перетину прямих AM і CL. Доведіть, що $KN \parallel FL$.

Розв'язання. Чотирикутник $BECL$ — паралелограм. Позаяк $AB \parallel CN$, а точка M — середина відрізка BC, то $ABNC$ також є паралелограмом, і тому $AE=NL$. Нехай P — точка перетину прямих BF і CN. Оскільки $FC \parallel BN$, то трикутники PBN і PFC подібні. Звідки $\frac{PF}{PB}=\frac{PC}{PN}$, тобто $PF=\frac{PB\cdot PC}{PN}$. Оскільки $PC \parallel BE$, то подібними будуть трикутники PCK і BEK. Маємо: $\frac{PK}{BK}=\frac{PC}{BE}$, $PK=\frac{BK\cdot PC}{BE}$. Отже, $\frac{PF}{PK}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Оскільки трикутники BLP і KEB подібні, то $\frac{PL}{PB}=\frac{BE}{BK}$, і $\frac{PL}{PN}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Тепер ми маємо пропорцію $\frac{PF}{PK}=\frac{PL}{PN}$, з якої, у свою чергу, випливає подібність трикутників PFL і PKN. Відтак, $\angle PFL=\angle PKN$, і тому $KN \parallel FL$, що й треба було довести.

10.3. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d і n виконуються нерівності $a+c<n$ і $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$. Доведіть, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1-\frac{1}{n^3}$.

Розв'язання. Оскільки $n > a+c \ge 2$, то $n \ge 3$. До того ж, $a < b$ і $c < d$, адже $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$.

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $b \ge n$ і $d \ge n$, тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \le \frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n} \le \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

б) Нехай $b \le n$ і $d \le n$, тоді з нерівності $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$ випливає, що $ad + bc < bd$, тобто $ad + bc + 1 \le bd$. Звідси $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \le 1 - \frac{1}{bd} \le 1 - \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

в) Нехай $b < n < d$. Якщо $d \le n^2$, то $bd < n^3$, і тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \le 1 - \frac{1}{bd} < 1 - \frac{1}{n^3}$. Якщо $d > n^2$, то $\frac{c}{d} \le \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$, оскільки $c < n - a \le n-1$, тобто $c \le n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ge 1 - \frac{1}{n^3}$. Тоді $1 - \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} + \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Звідси випливає, що $b > n(b-a) \ge n$ (тут ми врахували, що $a < b$), що суперечить нерівності $b < n < d$.

г) Нехай $d < n < b$. Якщо $b \le n^2$, то $bd < n^3$, і тоді $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \le 1 - \frac{1}{bd} < 1 - \frac{1}{n^3}$. Якщо $b > n^2$, то $\frac{a}{b} \le \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$, оскільки $a < n - c \le n-1$, тобто $a \le n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ge 1 - \frac{1}{n^3}$. Тоді $1 - \frac{c}{d} \le \frac{a}{b} + \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Позаяк $c < d$, маємо: $d > n(d-c) \ge n$. Одержали суперечність з нерівністю $d < n < b$.

Отже, нерівність $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^3}$ виконується в усіх випадках, що й треба було довести.

10.4. На столі лежать 100 карток, які пронумеровані натуральними числами від 1 до 100. Андрійко й Миколка вибрали собі однакову кількість карток так, що якщо картка з номером n є в Андрійка, то в Миколки є картка з номером $2n+2$. Яка максимальна кількість карток могла бути в обох хлопчиків?

Розв'язання. Спочатку доведемо, що кількість карток у обох хлопчиків не перевищує 66, тобто кількість карток у кожного не перевищує 33.

Оскільки $2n+2 \le 100$, то $2n \le 98$, тобто $n \le 49$. Це означає, що номери карток Андрійка належать множині $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Розіб'ємо цю множину на такі групи підмножин: $\{1, 4\}$, $\{3, 8\}$, $\{5, 12\}$, …, $\{23, 48\}$ (12 підмножин); $\{2, 6\}$, $\{10, 22\}$, $\{14, 30\}$, $\{18, 38\}$ (4 підмножини); $\{25\}$, $\{27\}$, $\{29\}$, …, $\{49\}$ (13 підмножин); $\{26\}$, $\{34\}$, $\{42\}$, $\{46\}$ (4 підмножини). Усього $12+4+13+4=33$ підмножини. Будь-які дві з цих підмножин не мають спільних елементів. Якщо в Андрійка буде щонайменше 34 картки, то за принципом Діріхле номери якихось двох з них будуть елементами однієї із вказаних вище двоелементних підмножин. Але оскільки кожна така двоелементна підмножина має вигляд $\{n, 2n+2\}$, то одержуємо суперечність з умовою задачі.

Приклад для множини A номерів 33 карток Андрійка може бути таким:

$$A=\{1, 3, 5, \dots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \dots, 49, 26, 34, 42, 46\}.$$

Тоді номери карток Миколки утворюватимуть множину $M=\{2n+2 \mid n \in A\}$.

Відповідь: 66 карток.

11.1. Для кожного дійсного значення параметра a визначте кількість дійсних розв’язків рівняння $\sqrt{ax+\sqrt[3]{x}}=x^{2013}$.

Розв’язання. Зрозуміло, що $x \ge 0$. Для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ $x=0$ є розв’язком даного рівняння. Будемо далі розглядати $x>0$ і запишемо наше рівняння в рівносильному вигляді $a=x^{4025}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

На проміжку $(0; +\infty)$ функція $f(x)=x^{4025}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ є неперервною та строго зростаючою. До того ж, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Отже, функція f на проміжку $(0; +\infty)$ набуває кожного дійсного значення, причому — рівно один раз.

Відповідь: рівняння має два розв’язки для будь-якого дійсного значення a.

11.2. Див. задачу 10.2.

11.3. Знайдіть усі функції $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, які задовольняють такі дві умови:

а) $f(x)\ne f(y)$ для будь-яких цілих x і y таких, що $x\ne y$;

б) $f(f(x)y+x)=f(x)f(y)+f(x)$ для всіх $x\in\mathbf{Z}$ і $y\in\mathbf{Z}$.

Розв’язання. Візьмемо $x=y=0$. Знаходимо, що $f(0)=0$. Нехай $x_0\ne 0$ і позначимо $a=f(x_0)$, $a\ne 0$. Підставимо до вихідного співвідношення $x=x_0$. Тоді для всіх $y \in \mathbf{Z}$ маємо $f(ay + x_0) = af(y) + a$. Тепер підставимо до вихідного співвідношення замість x вираз $ax + x_0$. Одержуємо:

$$f\left(f(ax + x_0)y + ax + x_0\right) = f(ax + x_0)f(y) + f(ax + x_0),$$

$$f\left(\left(af(x) + a\right)y + ax + x_0\right) = \left(af(x) + a\right)f(y) + af(x) + a,$$

$$f\left(af(x)y + ay + ax + x_0\right) = af(x)f(y) + af(y) + af(x) + a.$$

Оскільки до правої частини x і y входять симетрично, то $f\left(af(x)y + ay + ax + x_0\right) = f\left(af(y)x + ax + ay + x_0\right)$ для всіх $x \in \mathbf{Z}$ і $y \in \mathbf{Z}$.

З урахуванням умови задачі, $af(x)y + ay + ax + x_0 = af(y)x + ax + ay + x_0$, тобто для всіх $x \in \mathbf{Z}$ і $y \in \mathbf{Z}$ $f(x)y = f(y)x$. Зафіксуємо довільне $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, і позначимо $k = \dfrac{f(y_0)}{y_0}$, $k \neq 0$. Тоді $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Оскільки $f(x)$ є цілим числом для кожного цілого x, то легко встановити, що $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Залишається перевірити, що всі функції вигляду $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, задовольняють умову задачі.

Відповідь: $f(x) = kx$, $x \in \mathbf{Z}$, де $k \neq 0$ — довільне ціле число.

11.4. Нехай задано натуральне число $n \geq 2$ і додатні дійсні числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Труби з довжинами $l_1, l_2, \ldots, l_n$ лежать у вказаному порядку в ряд. Зварювальник може зварити разом будь-які дві сусідні труби довжинами x та y, утворивши трубу довжиною $x + y$, і за це він бере плату $(x + y)^3$. (Наприклад, якщо зварити другу й третю труби, а потім — отриману трубу з першою, то плати за ці зварювання дорівнюватимуть $(l_2 + l_3)^3$ та $(l_1 + l_2 + l_3)^3$ відповідно.) Порядок, у якому лежать труби, змінювати не можна. Доведіть, що якими б не були початкові довжини труб, існує така послідовність зварювань, що всі труби будуть зварені разом і сумарна плата за це буде меншою, ніж $2(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)^3$.

Розв'язання. Оберемо наступну стратегію. На кожному кроці проситимемо зварювальника зварити дві сусідні труби, сумарна довжина яких найменша серед усіх пар сусідніх труб. Якщо є декілька таких пар, можна обрати будь-яку з них. Доведемо індукцією за n, що сумарна плата S при зварюванні за такою стратегією менша, ніж $2l^3$, де $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$.

База індукції очевидна: для $n = 2$ плата $(l_1 + l_2)^3$ менша за $2(l_1 + l_2)^3$.

Нехай $n > 2$. Розглянемо шматки A і B, які були зварені на останньому кроці. Нехай їхні довжини дорівнюють a і b відповідно, $l = a + b$. Без обмеження загальності вважаємо, що A лежить ліворуч від B, $a \le b$. Розглянемо процеси зварювання цих шматків окремо один від одного. Оскільки на кожному кроці сумарна довжина зварюваних труб найменша серед усіх пар сусідніх труб, то вона є найменшою й серед сусідніх пар труб, що входять до цього шматка. Тобто шматки A і B теж утворюються за вказаною вище стратегією, отже, сумарні плати за їхнє створення менші за $2a^3$ та $2b^3$ відповідно.
Розглянемо два випадки.
Перший випадок: $a \ge \frac{l}{4}$. Сумарна плата S менша, ніж сума плат за утворення A і B та плати за зварення їх разом, тобто $S < 2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3$. Доведемо нерівність $2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3 < 2l^3 = 2(a+b)^3$, тобто $t^3 + (1-t)^3 < \frac{1}{2}$, $6t^2 - 6t + 1 < 0$, де $t = \frac{a}{a+b}$, $t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. Неважко переконатися, що на вказаному відрізку остання нерівність виконується.
Другий випадок: $a < \frac{l}{4}$. Якщо шматок B не є звареним з менших шматків, то сумарна плата менша за $2a^3 + l^3 < 2\left(\frac{l}{4}\right)^3 + l^3 < 2l^3$. В іншому випадку розглянемо крок, на якому було отримано шматок B. Нехай його було отримано зварюванням шматків C і D довжинами c і d відповідно, причому C лежав ліворуч від D. Тоді $d \le a$ (якщо $d > a$, то $c + d > a + c$, і ми не могли б зварювати C і D — у тому числі, зрозуміло, і в ситуації, коли шматок A ще не утворився). Доведемо, що шматок C не може бути звареним з менших шматків. Припустимо супротивне: нехай C був утворений на деякому кроці зі шматків E і F довжинами e і f відповідно, причому E лежав ліворуч від F. Тоді $e + f \le f + d$ і $e + f \le a + e$, тому $c = e + f \le d + a \le 2a < \frac{l}{2}$ (якщо, скажімо, шматок D ще не утворився, то беремо найлівішу на цей момент з утворених його частин D' довжиною d' і одержуємо, що $e + f \le f + d' < f + d$; аналогічно міркуємо і якщо шматок A ще не утворився). Звідси $l = a + b = a + c + d < 2a + \frac{l}{2} < l$, і дістаємо суперечність. Отже, шматок C існував із самого початку, і його отримання не потребує плати.
Маємо:

$$S < 2a^3 + 2d^3 + \left(c+d\right)^3 + l^3 \le 2a^3 + 2a^3 + \left(l-a\right)^3 + l^3 = l^3\left(3t^3 + 3t^2 - 3t + 2\right),$$

де $t = \dfrac{a}{l} \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Оскільки

$$3t^3 + 3t^2 - 3t + 2 < \frac{3t}{16} + \frac{3t}{4} - 3t + 2 < 2 - t < 2,$$

то $S < 2l^3$.

Задачі запропонували:

8.1	В. О. Швець	**10.1**	В. А. Ясінський
8.2	О. Б. Панасенко	**10.2**	В. А. Ясінський
8.3	І. М. Мітельман	**10.3**	В. А. Ясінський
8.4	В. А. Ясінський	**10.4**	В. А. Ясінський
9.1	І. М. Мітельман	**11.1**	І. М. Мітельман
9.2	В. А. Ясінський	**11.2**	Див. задачу 10.2
9.3	В. А. Ясінський	**11.3**	І. М. Мітельман
9.4	І. М. Мітельман, Д. С. Скороходов, В. А. Ясінський	**11.4**	О. В. Рибак